La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'.

Memoria del prof. MARIO PIERI

(presentata dal Socio G. Castelnuovo, e approvata dal Socio G. Segre).

PREFAZIONE

« Die meisten Lehrbücher der Geometrie gehen zu « bald zum Besondern, nämlich zur Congruenz und Aehnlichkeit der Dreiecke über; daher sie auch manche « Begriffe nicht in der gehörigen Allgemeinheit aufstellen... Aehnliche Figuren sind nichts anderes als « homologe Stücke von ähnlichen räumlichen Systemen. « Der Betrachtung von centrischen Figuren sollte die « des centrischen Systems, und der Betrachtung von « symmetrischen Figuren die des symmetrischen Systems vorangeschickt werden. Uebrigens ist in vielen « Lehrbüchern, obgleich Natur und Kunst in allen ihren « Gebilden nach Symmetrie streben, dieser Begriff gar « nicht entwickelt. » G. C. von Staudt, '*Geom. d. Lage*', Vorwort (Nürnberg, 1847).

« Tutto sommato, parrebbe che gli elementi costruttivi primordiali, che più spiccatamente intervengono « a formare lo spazio tattile-muscolare, non siano le « nozioni della retta e del piano, ma sì della 'distanza', « e quindi dei 'cerchi' e delle 'sfere' ». F. Enriques, *Problemi della scienza*, pag. 322 (Bologna, 1906).

In un lavoro del 1899 — dopo avere affermato « la possibilità di comporre tutta « quanta la Geometria elementare con queste due sole materie prime: il 'punto' « e una certa relazione fra tre punti a, b, c, che si può interpretar con le frasi « 'c dista da a quanto b', 'c appartiene alla sfera di b, centro a', 'le « coppie (a, b) ed (a, c) sono congrue fra loro', e rappresentar, se ci piace, « col simbolo '$c \varepsilon b_a$' » — soggiungevo: « l'eccessiva complicazione che involge « sinora la più gran parte d'un tal sistema (date le molte esigenze d'indole logico-« deduttiva, a cui si vuol sottostare) ne lascia tuttavia il desiderio, se non il bisogno, « di nuovi studî e di ricerche ulteriori (1) ». Frutto di così fatte ricerche il presente

(1) « *Della Geometria Elementare come sistema ipotetico-deduttivo* », nelle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, v. XLIX$_2$ (1899), pag. 176.

Saggio che (s'io non m'inganno) raggiunge appunto quel grado di semplicità e di rigore, ch'ebbi in mira sin da quel tempo, e che agli occhi miei rappresenta il massimo pregio di questo genere di studî.

Le analogie, che intercedono fra i due lavori, son per altro assai meno di quanto farebbe supporre l'affinità del soggetto. Là, dove il 'moto' o 'congruenza delle figure', come trasformazione dei punti in punti, si ammetteva e si adoperava anche più del bisogno in qualità d'idea prima, cioè non definita altrimenti che per postulati; quì per l'opposto, tutte quante le operazioni o relazioni geometriche fondamentali (simmetrie, congruenze, similitudini, ecc.) vengon definite nominalmente, anzi geneticamente, a spese del 'punto' e dell''equidistanza da un punto': con processo in tutto simile a quello, per cui — movendo dai soli concetti di 'punto projettivo' e di 'allineamento fra punti projettivi' — la Geometria Projettiva Staudtiana introduce le collineazioni e le correlazioni [1].

Per es. la definizione di *similitudine* — come trasformazione dei punti, rispetto alla quale è invariante la relazione '*c* dista da *a* quanto *b*' (§ 4) — fa perfetto riscontro a quella di *collineazione* [2]. Novità che non hanno precedenti notevoli, fuorchè nel sistema di G. Veronese [3] — dove son molti di più gli oggetti non definiti, e di tutt'altra specie è la critica e il metodo — e nei *Fondamenti della metrica projettiva* di B. Levi [4]. Nè quì si arrestano gli obblighi nostri verso i più fecondi principî e gli strumenti più validi della Geometria moderna. Il concetto di rappresentazione dei punti in punti, o di trasformazione estesa a tutto lo spazio, acquista il medesimo ufficio fondamentale, che ha nella Geometria Projettiva e nell'Analisi (§§ 2, 4, 6); e la misura delle lunghezze e degli angoli è resa indipendente dall'esistenza di unità mobili nello spazio (§ 8): ecc. — Inoltre l'analisi dei dati e delle premesse che reggono la Geometria Elementare si spinge molto più innanzi che nel citato lavoro del 1899; e scuopre, si può dir, tutte le fondamenta dell'edifizio Euclidiano [5].

Il nuovo Saggio, che or si espone al giudizio del pubblico, palesa intenti speculativi e critici: in quanto mira ad escluder col fatto qualunque dubbio possibile sulle attitudini della Geometria Elementare a subir le leggi più rigorose del metodo;

(1) Vedi per es. i miei *Principî di Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo*, nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, v. XLVIII, (1898).

(2) G. C. v. Staudt, *Die Geometrie der Lage*, § 10 (Nürnberg 1847).

(3) *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* ecc. (Padova, 1891); ed *Elementi di Geometria*, (Verona, 1897).

(4) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, v. LIV, (1904).

(5) Non lungi dall'argomento di queste ricerche versan le Note « *Un nuovo sistema di definizioni per la Geometria euclidea* » di A. Padoa (Deuxième Congrès international des Mathématiciens. Paris, 1900) e « *La Geometria fondata sulle idee di punto e distanza* » di G. Peano (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, XXXVIII, 1902): trattando sommariamente del come si definiscano gli enti geometrici con le sole idee primitive di 'punto' e 'congruenza fra coppie di punti', per altro senza toccar la quistione dei postulati o proposizioni primitive. Poca attinenza ha col nostro soggetto la elegante Memoria di O. Veblen '*A system of axioms for Geometrie*' (Trans. of the Americ. Society, v. V, 1904) che — sulle tracce di M. Pasch e G. Peano — istituisce e conferma i principî della Geometria Projettiva, sopra le sole nozioni di 'punto' e 'segmento' (Anordnung) mediante un sistema completo e categorico di postulati indipendenti fra loro.

a sciogliersi da ogni vincolo di servitù con l'intuizione di spazio; ad essere istituita, in tutta la sua integrità, come sistema ipotetico-deduttivo; e a comparir, se ci piace, sotto la forma di « studio d'un certo ordine di relazioni logiche » (¹)

Non ha vesti o pretese didattiche; ma neppur vorrebbe apparire così remoto dalla Scuola, nè di sì ardua o preziosa fattura, da non potersene avvantaggiare anche i giovani poco più che iniziati allo studio delle Matematiche (²). Certo è che l'insegnamento della Geometria Elementare, quale oggi s'imparte nelle nostre scuole medie, è troppo impari al bisogno di chi più tardi abbia a fare di quelle scienze il suo studio principale: onde più volte da valorosi e provetti docenti mi avvenne di udire espresso il desiderio, che i loro giovani scolari trovasser poi modo di approfondirne o rifarne il trattato, con mezzi più idonei e più rigorosi, nelle scuole universitarie.

Da questi cenni, e dall'indice che viene appresso, il Lettor si può fare un'idea circa l'indole e il contenuto del presente Saggio. Le proposizioni primitive sono in numero di ventiquattro, e di ognuna si troverà l'enunciato anche in termini di 'punto' e 'sfera'. L'Appendice è soltanto per chi non s'intende di certe idee familiari ai matematici, come di postulato, definizione, deduzione, rappresentazione, e simili: che tutte son di vitale interesse per noi.

Elenco delle abbreviazioni.

Se A, B, C sono punti, con 'AB', 'ABC' si rappresenta la retta (illimitata) congiungente A e B e il piano congiungente gli A, B e C; con 'B_A' la sfera che ha il centro in A e passa per B; con 'Sfr(A, B)' quella sfera, dove i punti A e B sono poli, (o diametralmente opposti). I simboli 'A|B' ed 'A/B' denotano l'uno il punto medio di A e B, l'altro il simmetrico di A rispetto a B. Con '|AB|' si suole indicare il segmento terminato in A e B (gli estremi inclusi), con '|AB' la semiretta, o raggio, che ha l'origine in A e contiene B. A designare l'angolo piano convesso o concavo, che ha per lati le semirette |AB, |AC, si scrive rispettivamente '$\hat{A}$.BC' o '$\breve{A}$.BC'; mentre '|ABC|' denota il triangolo che ha per lati i segmenti |AB|, |AC|, |BC|. Il segno '$\perp$' fra due rette o piani, ovver fra una retta ed un piano, afferma l'ortogonalità di queste figure tra loro. Similmente '$\asymp$' è un indice di congruenza (o sovrapponibilità); '$\sigma_{A,B}C$' vuol dire 'seguente C nel senso A $\longrightarrow$ B'. Ma tutti questi caratteri peculiari alla Geometria si definiranno ad uno ad uno nel testo.

'P' o 'Prp' (Proposizione), 'Df' o 'Dfn' (Definizione), 'Pst' (Postulato), 'Tr' (Teorema), 'Ip' o 'Ipts' (Ipotesi), 'Ts' (Tesi). La scrittura 'P 1', 'P 2',... richiama le proposizioni 1ª, 2ª,...; e, se non è seguita da qualche citazione di §, si riferisce al § corrente. Il simbolo "$\binom{D, C, A}{A, B, C}$ P 7 § 2" richiama la P 7 del § 2, nella quale i nomi degli enti A, B, C siano rispettivamente mutati in D, C, A.

(¹) « Geometry is in structure a system of theorems deduced in pure logical way from certain improvable assumptions precreated by auto-active animal and human mind » G. B. Halsted, in Science N. S., vol. XIX, n. 480 (1905). — Vedi anche una mia Nota « *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique* ». Congrès intern. de Phylosophie, Paris, 1900.

(²) It is an error to believe that rigor in the proof is the enemy of simplicity. On the contrary, we find it confirmed by numerous examples, that the rigorous method is at the same time the simpler and the more easily comprehendet. The very effort for rigor force us to find out simpler methods of proof. » G. B Halsted, ibidem.

Si adopera il segno '$\equiv$' al posto di « è uguale per definizione a... ». Così $r \equiv AB$ (dove A e B siano punti diversi) significa « r è (sotto altro nome) la congiungente A con B ».

'ε' Precede sempre un nome comune, vale a dire il simbolo d'una classe, e segue il nome, od i nomi, d'uno o più individui di questa. Si può intendere e leggere per 'è un...', 'sono dei...', 'appartiene (o appartengono) a...'.

'$\supset$' Posto in mezzo a due classi vuol dire che la prima (a sinistra) è contenuta nell'altra, ossia che ciascun elemento dell'una spetta, come individuo, anche all'altra. Fra due prps. denota che la seconda è conseguenza della prima, e sta per 'si deduce'.

'$=$' Segno di eguaglianza logica. Fra due classi denoterà che ciascuna è contenuta dall'altra. Fra due punti è per dire, ch'essi coincidon fra loro. Fra due proposizioni denota, che ciascuna è conseguenza dell'altra.

'$\sim$' Segno di negazione, sta invece di 'non'. Per es. con la scrittura '$C \sim \varepsilon AB$' si esprime che C non appartiene ad AB. Così '$\sim \equiv$' vorrà dire 'non è uguale a...'.

'$\cap$' Segno di congiunzione logica, o copula. Fra due nomi comuni è per indicare il prodotto logico delle due classi, ossia l'aggregato degli individui comuni alle medesime. Fra due proposizioni vuol dire, che si afferma l'una e l'altra ad un tempo. Si può leggere 'e', 'insieme con'.

'$\cup$' Disgiunzione logica. Fra due classi denota la loro somma logica, cioè la minima classe capace di contener l'una e l'altra. Fra due giudizi è per affermar l'uno o l'altro, indistintamente. Si legge 'o', 'ovvero'.

Questi pochi segni di Logica si useranno con parsimonia. Le dimostrazioni verranno chiuse generalmente in parantesi quadre: ma si tratterà per lo più d'uno schema di deduzione atto a guidar dall'Ipotesi fino alla Tesi.

Indice delle Materie.

---

§ 1.

Il punto e la sfera. Proprietà cardinali dell'equidistanza da un punto. Prime proposizioni circa la retta ed il piano. Centro d'una coppia di punti. S'introducon le simmetrie rispetto ad un punto e rispetto ad un asse (equinversione e semigiro).

P 1 — *Df.* (¹) « *Figura* è il medesimo che gruppo o collezione di punti. « Il nome di 'figura' spetta a qualsivoglia aggregato o classe di punti, senza ecce- « zione di sorta. — Se φ è una figura, per significare che A è un punto di φ si suole « anche dire che A *appartiene* a φ, o *giace* in φ, o che φ *passa* per A, ecc.; o si « scrive '$A \varepsilon \varphi$' ».

P 2 — *Df.* « Dire che una figura φ *è contenuta*, o *giace, in* un'altra ψ — o « che ψ *passa per* φ — sarà quanto affermare che ogni punto di φ appartiene anche a « ψ: la qual cosa si esprime ancora scrivendo '$\varphi \supset \psi$'. Due figure *coincidono*, ovver « 'si confondono in una', qualunque volta ciascuna di esse è contenuta dall'altra ». — Osservate che ogni figura è contenuta in sè stessa (proprietà riflessiva del *contenere*); e che se $\varphi \supset \psi$ e $\psi \supset \chi$ — essendo anche χ una figura — bisognerà che $\varphi \supset \psi$ (proprietà transitiva). Questi medesimi caratteri palesa la relazione di *coincidenza* tra due figure: la quale inoltre è conversiva o simmetrica. — Di due o più figure, le quali abbian qualche punto in comune, o contengano tutte una medesima figura, bene spesso diremo che *s'incontrano* o *s'intersecano* in quei punti, o in questa figura. La classe dei punti, ognuno dei quali appartiene a due o più figure date $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ ad un tempo (ove esistano punti siffatti) è una figura, che dicesi la *intersezione* (o prodotto logico) di quelle, e può essere significata da '$\varphi \cap \psi \cap \chi \cap \ldots$': altra figura è la somma logica delle $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ — espressa in '$\varphi \cup \psi \cup \chi \cup \ldots$' — cioè la classe dei punti, ognuno dei quali appartiene a φ, ovvero a ψ, ovvero a $\chi, \ldots$ indistintamente.

P 3 — *Df.* « Due punti *coincidono*, o non si distinguon fra loro, se uno « di essi appartiene a qualunque figura, che passi per l'altro: laddove, se esiste una « qualche figura cui l'uno appartenga e non l'altro, i due punti saranno distinti, « o diversi fra loro ». — Osservate che anche una tal relazione (di coincidenza fra punti) è riflessiva, transitiva e simmetrica. — Allorchè due o più punti coincidono, si suol parlarne talvolta come d'un solo individuo; ma è bene spesso opportuno di concepirli e trattarli come figura (costituita in più punti coincidenti). — Per solito la coincidenza fra punti ovver tra figure si nota col segno '$=$' (*è uguale a*).

(¹) Vedi la nota I in Appendice.

P 4 — *Df.* « Se A, B, C sono punti, il giudizio ‘C appartiene alla *sfera di* « B, *centro* A’, è per significare che C dista da A quanto B, o che B e C « sono equidistanti da A. In altri termini, si chiama ‘*sfera di* B, *centro* A’ « la figura di tutti quei punti, ognuno dei quali dista da A quanto B ». Invece di ‘sfera di B, centro A’ si dice anche talvolta ‘sfera di B *intorno ad* A, o *circa* A’, o si scrive ‘B_A’; e per esprimere che C dista da A quanto B si dirà spesso che i punti B e C sono ‘equidistanti da A’, o che A ‘equidista dai punti B e C’. — Con la frase ‘C dista da A quanto B’ si afferma, che una certa relazione intercede fra i punti A, B, C. Questa relazione non si definisce, come non è definito il punto: ma per mezzo di queste due cose — e insomma mercè del ‘punto’ e della ‘sfera d'un punto intorno ad un altro’ — si definiranno tutti quanti gli oggetti che occorrono in Geometria Elementare [1].

Postulati I-II [2].

P 5 — *Esiste almeno un punto; e, dato un punto a piacere, esiste ancor qualche punto diverso da quello.*

Postulati III-IV.

P 6 — *Qualunque siano i punti* A *e* B, *sempre il punto* B *appartiene alla sfera di* B, *centro* A. *E se un punto* C *appartiene alla sfera di* B, *centro* A, *il punto* B *alla sua volta dovrà giacer sulla sfera di* C, *centro* A. — Grazie all'ultima defnz.ᵉ (P 4), questi principî III-IV, dicon soltanto: « Posto che A e B « siano punti, sempre B dista da A quanto B; e se un punto C dista da A quanto « B, converrà che B alla sua volta disti da A quanto C ». (Proprietà riflessiva e conversiva dell'‘equidistanza’ da un punto).

Postulato V.

P 7 — *Pur che* A *e* B *siano punti, se avviene che un terzo punto* C *appartenga alla sfera di* B, *centro* A, *e un quarto punto* D *alla sfera di* C, *centro* A, *forz'è che* D *appartenga alla sfera di* B *circa* A. — O, in altri termini (grazie a P 4): « Se A, B, C, D sono punti e ‘C dista da A quanto B’ e D quanto C; con« verrà che anche il punto D disti da A quanto B ». (Proprietà transitiva dell'equidistare).

Postulato VI.

P 8 — *Intanto che i punti* A *e* B *son diversi fra loro, non potrà darsi che* A *spetti alla sfera di* B, *centro* A. — Cioè « Se i punti B ed A non coincidono « (P 3), per certo A non dista da A quanto B » (P 4).

(1) Vedi la nota II in Appendice.
(2) Ved. la nota III in Appendice.

P 9 — *Tr.* «Se coincidono i punti A e B, nessun punto diverso da A appar- « tiene alla sfera di B, centro A, ma il punto A v'appartiene ». [Per certo B appartiene alla sfera B_A (P 6); dunque anche A (P 3, 4), visto che A = B per Ipts. D'altra parte, se un qualche punto C diverso da A potesse giacere in B_A, dovrebbe il punto B giacer sulla sfera C_A (grazie alla stessa P 3); per la qual cosa anche A spetterebbe a C_A, contro P 8]. — Di qui nasce, che la sfera d'un punto A qualsivoglia intorno a sè stesso (ossia la figura A_A) è tutta condensata in A: visto che i punti A ed A si confondono, qual che sia A (P 3). Cosicchè (P 4) nessun punto diverso da A dista da A quanto A.

P 10 — *Tr.* «Sempre che A, B, C siano punti; se C appartiene alla sfera di « B, centro A, le sfere di B e di C intorno ad A si confondono in una sola e me- « desima figura ». Eucl. lib. 3 prp. V (¹). [Basterà dimostrare (giusta P 2) che ciascun punto della figura B_A appartiene anche all'altra figura C_A; e che, viceversa, ogni punto di questa è anche punto di quella. Ora, sia p. es. M un punto arbitrario nella sfera di B, centro A. Dalla P 6 si deduce, che il punto B appartiene alla sfera M_A; ma per ipts. abbiamo, che C appartiene a B_A: dunque, in virtù di P 7 (dove si legga M, B, C in luogo di B, C, D), bisognerà che C appartenga a M_A; e di qui si deduce, attraverso la stessa P 6, che M appartiene alla sfera C_A. Pertanto B_A sarà contenuta in C_A. Viceversa, detto N un punto arbitrario nella sfera di C intorno ad A; dall'Ipts. che C appartenga a B_A ed N a C_A, si deduce, sempre in virtù di P 7, che N appartiene a B_A: onde C_A sarà contenuta in B_A. E però si conclude che $B_A = C_A$; c. v. d.].

P 11 — *Df.* «Posto che A, B siano punti e A diverso da B, si chiamerà « '*congiungente* A *con* B' — o semplicemente 'AB' — la classe dei punti, per « ognuno dei quali — sia per es. X — le sfere di X intorno ad A e B non hanno « punti comuni, da X in fuori ». Eucl., lib. 3°. prp. XI, XII. È quanto dire (secondo P 4) il «luogo d'ogni punto X, per cui non esiste alcun punto diverso da X, e che disti da A e da B quanto X — tale insomma che un punto, il quale disti da A e da B quanto X, debba coincider con X». (²) — Osservate che il punto X onde si parla è certamente comune ad ambo le sfere X_A e X_B (P 6). Due sfere obbedienti alla prescrizione anzidetta — cioè d'incontrarsi in un punto solo — si diranno '*tangenti* fra loro' in quel punto (punto '*di contatto*'). E l'esistenza di qualche punto X come sopra emerge per ora dalla seguente:

P 12 — *Tr.* «Sotto la stessa ipotesi, per certo i punti A e B «giaceranno « sulla congiungente A con B; e le due figure 'AB' e 'BA' coincideranno». [Le sfere A_A e A_B non s'incontrano fuori di A, posto che nessun punto diverso da A appartiene alla sfera A_A (P 9): dunque A ϵ AB (P 11) e nel modo stesso anche B ϵ

(¹) Nelle citazioni di Euclide, mi richiamo all'edizione di E. Betti e F. Brioschi per le scuole italiane, 15ª rist. (Firenze, Le Monnier, 1885).

(²) Questa dfnz., e l'altra consimile in ordine al piano che unisce tre punti dati (vedi P 27) spettano a G. W. Leibniz (« Haec plani definitio mihi est, ut sit locus omnium punctorum sui ad tria puncta in eandem rectam non cadentia situs unicorum » *Characteristica Geometrica*, Math. Schr. t. V, p. 189, a. 1679). Furon poi ritrovate da A. Cauchy (*Sept leçons de physique générale*. Paris, 1868, pagg. 44-45) e quindi accolte da vari Autori (Mansion, Padoa, Peano,.....).

AB. — Il resto viene da ciò, che la dfnz. preced. è simmetrica rispetto ad A e B; cioè si converte in sè stessa ogni volta che questi punti si barattan fra loro] — Che poi la congiungente AB contenga altri punti in più di A e B, è cosa da stabilire più tardi: ved. i pstl.[1] XII e XIII.

Postulato VII.

P 13 — *Ogni qualvolta* A, B, C *siano punti, se le due sfere* C_A *e* C_B *non s'incontrano fuor di* C, *similmente le sfere di* B *intorno ad* A *e* C *non potranno aver punti a comune diversi da* B. — Vale a dire (P 4) che: « Se, tranne il « punto C, nessun altro punto disti da ognuno dei punti A e B quanto C, nemmen « potrà esistere un punto diverso da B che disti da A e da C quanto B (premesso « che i punti A e C non coincidano) ».

P 14 — *Tr.* « Dati i punti A e B come sopra, tanto vale affermare che un punto « C diverso da A appartenga alla congiungente A con B, quanto dire che il punto « B appartiene alla congiungente A con C ». [Invero, di questi due fatti il secondo è conseguenza del primo, grazie alla prps. prec.[te] e alla dfnz. P 11. Ma la stessa P 13 (purchè vi si legga C e B ov'è scritto B e C) ne assicura, che C appartiene ad AB, se B ad AC: onde il primo di que' due fatti è a sua volta una conseguenza dell'altro].

Postulato VIII.

P 15 — *Qualunque siano i punti* A *e* B *non coincidenti fra loro, esisterà senza fallo anche un punto* C, *per cui le sfere* C_A *e* C_B *s'incontrino fuor di* C. — Una volta ammessa la dfnz. P 11, questo giudizio non differisce dall'altro: « Per ogni « coppia di punti distinti si può sempre affermar l'esistenza di almeno un punto « straniero alla lor congiungente (ossia tale, che qualche punto diverso da quello disti « da A e da B come quello) ».

Postulato IX.

P 16 — *Se, essendo* A, B, C *punti dati,* C *sia l'unico punto comune alle sfere* C_A *e* C_B *ed* M *un punto arbitrario; allora ogni punto comune alle sfere* M_A *ed* M_B *dovrà appartenere alla sfera* M_C. — O, in altri termini (P 4): « Premesso che A, « B, C, M sono punti; se nessun punto diverso da C disti da A e da B quanto C, « allora ogni punto, che disti da A e da B quanto M, dista pure da C quanto M ». La Ts. afferma in sostanza (P 2), che « l'intersezione delle due sfere di M intorno ad A e B giacerà sulla sfera M_C (cioè che $M_A \cap M_B \supset M_C$) ».

P 17 — *Tr.* « Posto che A, B siano punti diversi l'uno dall'altro, se un punto « C appartiene alla congiungente A con B, ma è diverso da A, le due congiungenti « A con B ed A con C si confonderanno in una sola ». [Proveremo anzi tutto che un punto, il quale appartenga alla congiungente A con C, deve eziandio appartenere alla congiungente A con B. Sia X un tal punto. Se le sfere X_A e X_B s'incontrassero

in qualche altro punto diverso da X, per quello dovrebbe passare anche X_C (grazie a P 16): di modo che non sarebbe più vero il supposto, che le X_A e X_C non s'incontrino fuori di X (P 11). Dunque X appartiene ad AB, onde AC $\ni$ AB. Resta il vedere che, viceversa, ogni punto di AB dovrà stare in AC, vale a dire che AB $\ni$ AC. Per certo il punto B appartiene alla congiungente A con C (P 14). Ma, se dall'esser C un punto di AB, per altro diverso da A, si deduce (come abbiam visto or ora) che AC sia contenuta in AB; nel modo stesso dal fatto, che B è un punto di AC diverso da A, dovrà risultare che AB sia contenuta in AC].

P **18** — *Tr.* « Qualunque volta i punti A e B non coincidano, e C sia un « punto della congiungente A con B, purchè diverso da B, le due congiungenti « AB e BC coincideranno ». [L'Ipts. vuol che C appartenga a BA (P 12): e di qui si deduce, attraverso $\binom{B\,,\,A}{A\,,\,B}$ P 17, che BA = BC; e p. cons. che AB = BC].

P **19** — *Tr.* « Sempre che A, B siano punti l'uno diverso dall'altro, se avvien che « due punti C e D, pur essi non coincidenti, appartengano alla congiungente A con « B, le due figure AB e CD coincideranno ». [Dall'Ipts. emerge, che il punto C non coincide ad un tempo con A e con B (P 3). Ora, ove C sia diverso da A, ne avverrà che le congiungenti A con B ed A con C si confondono (P 17), e p. c. che il punto D appartiene ad AC: ma di qui si deduce, in virtù di $\binom{C\,,\,D}{B\,,\,C}$ P 18, che le congiungenti A con C e C con D si confondono; onde AB = CD. Per egual modo, ove C sia diverso da B, la P 18 fa essere uguali le due figure AB e BC; onde il punto D appartiene a BC: e la stessa $\binom{B\,,\,C\,,\,D}{A\,,\,B\,,\,C}$ P 18 farà che coincidano le due figure BC e CD, e p. c. le AB e CD come dianzi. Sicchè in ogni caso AB = CD].

P **20** — *Tr.* « Premesso che A, B, C sono punti al tutto diversi fra loro e « che C appartiene alla congiungente A con B, l'intersezione delle due sfere d'un « punto qualsivoglia M intorno ad A e B coinciderà sia con l'intersezione delle « due sfere M_B ed M_C, sia con l'intersezione delle due sfere M_C ed M_A ». [Se il punto M appartiene alla congiungente A con B, tutte e tre quelle intersezioni son condensate in M (P 11): ma supponiamo che non appartenga ad AB. Il principio IX (P 16), presenti le defnz^i P 2, 4, ne assicura che l'intersezione di M_A con M_B dovrà giacere eziandio sulla sfera M_C: essa dunque sarà una figura comune tanto alle sfere M_B ed M_C, quanto alle sfere M_C ed M_A. Ora poichè dall'Ipts. emerge — in virtù di P 14, 12 e $\binom{B\,,\,A}{A\,,\,B}$ P 14 — che B ε AC ed A ε BC; basta appellarsi di nuovo allo stesso principio IX attraverso le sostituzioni $\binom{C\,,\,B}{B\,,\,C}$, $\binom{A\,,\,C}{C\,,\,A}$, per esser certi che ognuna delle figure $M_C \cap M_A$, $M_B \cap M_C$ sarà contenuta dalla figura $M_A \cap M_B$. Dunque $M_A \cap M_B = M_B \cap M_C = M_C \cap M_A$ (P 2): c. v. d.].

P **21** — *Df.* « Se A, B, C, ... sono punti, le frasi come 'A, B, C, ... sono « *allineati*', o 'son *collineari*', o '*collimano*' voglion dire: Esiston due punti X « ed Y diversi l'uno dall'altro e tali, che gli A, B, C, ... stiano tutti sulla con- « giungente X con Y — vale a dir tali (P 4, 11), che nessun punto diverso dagli

« A, B, C, ... disti da X e da Y quanto A, o B, o C, ... ». — Non ci arrestiamo a segnalar tutte quante le conseguenze nascenti dal carattere di simmetria, che spetta a codesta relazione (di *allineamento*); come altresì dalla mutua dipendenza fra questa e la figura, di cui si parla in P 11. Di tal sorta sono ad es. le tre prpsz. che seguono.

P 22 — *Tr.* « Di tre punti non collineari, ciascuno è diverso dagli altri due, « ed è sempre escluso dalla congiungente degli altri due ». [Se almeno due di quei punti son distinti fra loro — e siano A e B — l'Ipts. esclude senz'altro che il terzo punto C appartenga alla lor congiungente (P 12, 21): per la qual cosa C è diverso da A e da B (P 3, 12); nè potrà darsi che B appartenga ad AC, od A a BC. Ma il supporre che tutti e tre si confondano in uno — p. es. in A — è contrario all'Ipts.; in quanto che allora, detto Y un punto diverso da A (e un tal punto esiste per certo, grazie al principio II) tutti e tre gli A, B, C giacerebber sulla congiungente A con Y (P 3, 12), cioè sarebbero collineari (P 21)].

P 23 — *Tr.* « Purchè A, B, C siano punti ed A diverso da B, si equivalgono « sempre i giudizî: 'C appartiene ad AB' ed 'A, B, C collimano' ».

P 24 — *Tr.* « Se quattro punti A, B, C, D siano tali, che tanto A, B, D, « quanto A, C, D e B, C, D collimano, saranno collineari anche i punti A, B, C ». — Vale a dire che « Se in quattro punti si contano tre allineamenti, ce ne dev'essere un quarto ». [Se D coincide con A, la Ts. è affermata esplicitamente in Ipts., grazie alla defnz. P 21 e agli attributi dell'eguaglianza fra punti (P 3). Se all'incontro D non coincide con A, tutti e tre gli A, B, C giaceranno sulla congiungente A con D; poichè questa, in virtù di P 19, dovrà esser tutt'una con quella che sopporta A, B, D per Ipts. (P 21), e con quella che sopporta A, C, D. Ecc.].

P 25 — *Tr.* « Esistono punti non collineari ». [Dai pstl.[i] I-II (P 5) nasce tosto, ch'esistono almeno due punti l'un l'altro distinti; sian p. es. A e B. Dopo ciò non si può contestar l'esistenza d'un punto C straniero alla congiungente A con B (P 15, 11): ora questi A, B, C son tre punti non collineari (P 23)].

P 26 — *Df.* « Si dà il nome comune di '*retta*' alla congiungente due « punti quali che siano, l'uno diverso dall'altro. Ovvero: Per 'retta' s'intende « la classe di tutte le congiungenti possibili, a tenor di P 11 ». Dunque il dire, ad es., che '*r* è una retta', val quanto affermar l'esistenza di certi punti A e B, diversi fra loro e tali, che *r* è (sotto altro nome) la congiungente A con B. — La P 19 non differisce pertanto da quel giudizio, che si enuncia comunemente dicendo: « Per due punti dati, pur che diversi fra loro, non passa più d'una retta ». — ovvero « Una retta qualsiasi è individuata mercè di due de' suoi punti »; ecc.

P 27 — *Df.* « Ogni qual volta A, B, C siano punti non collineari, si chiamerà « '*congiungente* degli A, B, C', ovvero '*piano* ABC', o semplicemente 'ABC' « la figura o luogo dei punti, per ognuno dei quali — sia per es. X — le tre « sfere di X intorno A, B, C non abbian punti a comune, da X in fuori. » — Il 'piano ABC' sarà dunque (P 4) la « classe dei punti, per ognuno dei quali — sia per es. X — non esiste alcun punto diverso da X, che disti da A, da B e da C quanto X »; di guisa che un punto, il quale disti dagli A, B, C quanto X, coinciderà con X. Cfr. P 11.

P 28 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., le figure ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, « CBA si confondono tutte in un solo e medesimo piano, il quale contiene le rette « AB, BC, CA per intero. » [La prima parte è vera per ciò, che nella P 27 il definente è simmetrico rispetto ai punti A, B, C. Ora, se X è un punto di AB (non importa quale) le sfere di X intorno ad A e B non s'incontrano altrove (P 11): per la qual cosa neanche le sfere X_A, X_B e X_C potranno tagliarsi in un punto diverso da X. Dunque X appartiene al piano ABC (P 27), e la congiungente A con B giacerà tutta quanta nel piano (P 2). Lo stesso avverrà delle rette BC, CA.]

P 29 — *Tr.* « E le rette che uniscono il punto A coi varî punti della con- « giungente BC, o B coi punti della CA, o C coi punti di AB giaccion tutte sul « piano ABC. » [Sia per es. D un punto arbitrario di AB. Per certo i punti C e D non coincidono (P 22, ecc.): proveremo che CD $\supset$ ABC. Tolgasi un punto X a piacere sopra la retta CD. Poichè D è il solo punto comune alle sfere D_A e D_B (P 11), l'intersezione delle due sfere X_A e X_B giacerà in ogni modo sopra la sfera X_D, grazie al principio IX (o anche solo in virtù del III principio, se X = D): vale a dire $X_A \cap X_B \supset X_D$. Dunque i punti $X_A \cap X_B$, che giacessero per avventura sopra la sfera X_C, saranno anche comuni alle sfere X_D e X_C: vale a dire $X_A \cap X_B \cap X_C \supset X_D \cap X_C$. Ma queste non hanno alcun punto comune, da X in fuori: dunque a più forte ragione le X_A, X_B, X_C non s'incontrano altrove. Dunque X appartiene al piano ABC; e p. c. la retta CD giace tutta in quel piano: c. v. d.]

Osservate che i termini 'retta', 'piano', ecc. si posson quì facilmente eliminare, per mezzo delle dfnz. precedenti. Ed anche appresso, qualunque termine geometrico che non sia 'punto' o 'sfera' si potrebbe senz'alcun dubbio rimuovere, ponendo in sua vece una conveniente circunlocuzione: se non che il discorso n'escirebbe soverchiamente prolisso, contorto, anzi il più delle volte inafferrabile; annullandosi tutto il vantaggio che viene dalle dfnz. geometriche. (Vedi la nota I in App.).

Postulato X.

P 30 — A, B, C, D *siano punti: se le due sfere* D_A *e* D_B, *ma non tutte e tre le* D_A, D_B, D_C, *s'incontrano altrove che in* D; *così anche le sfere* C_A, C_B, C_D *non avranno alcun punto a comune da* C *in fuori.* — Ovver, che è lo stesso: « Se « in ordine ai punti A, B, C, D si verifica, che qualche punto diverso da D sia « distante da A e da B quanto D; ma, salvo D, nessun altro punto disti da ognuno « degli A, B, C quanto D; allora niun punto diverso da C può distare dagli A, B, D « quanto C ». Cfr. P 13.

P 31 — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C; se avvien che un punto D « appartenga al piano ABC, ma non alla retta AB, allora il punto C starà nel piano « ABD. » Cfr. P 14. [Corollario della precedente P 30, avuto riguardo alle P 27, 26, 11, 23.]

Postulato XI.

P 32 — *Se, essendo* A, B, C, D *punti dati ed* M *un punto arbitrario, le tre sfere* D_A, D_B *e* D_C *non abbian punti a comune da* D *in fuori; allora ogni punto*

comune alle sfere $\mathrm{M}_A, \mathrm{M}_B, \mathrm{M}_C$ *dovrà stare eziandio sulla sfera* M_D. — O, se ci piace: « Ogni qual volta A, B, C, D, M sono punti, e, salvo D, nessun altro punto « dista da ognuno degli A, B, C quanto D; allora ogni punto, che disti dagli A, B, C « quanto M, disterà inoltre da D quanto M ». Cfr. P 16. — Ne viene, che « Se a tre punti dati non collineari si può coordinare una coppia di punti equidistanti da ognuno di quelli (a sè considerato), gli stessi due punti saranno eziandio equidistanti da qualsivoglia altro punto del piano, che unisce i tre punti dati ».

P **33** — *Tr.* « Se, essendo A, B, C punti non collineari, D sia un punto del « piano ABC, non però della congiungente A con B; i due piani ABC e ABD coin- « cideranno. » Cfr. P 17. [L'Ipts. involge, che A, B, D non collimano (P 23) e che C appartiene al piano ABD. Ora, supposto che M sia un punto arbitrario del piano ABD, il fatto che l'intersezione delle tre sfere $\mathrm{M}_A, \mathrm{M}_B, \mathrm{M}_D$ si riduce al solo punto M (P 27), e l'altro che $\mathrm{M}_A \cap \mathrm{M}_B \cap \mathrm{M}_C \supset \mathrm{M}_D$ (P 32) e per conseguenza $\mathrm{M}_A \cap \mathrm{M}_B \cap \mathrm{M}_C \supset \mathrm{M}_A \cap \mathrm{M}_B \cap \mathrm{M}_D$, portan seco di necessità che $\mathrm{M} \varepsilon \mathrm{ABC}$: onde $\mathrm{ABD} \supset \mathrm{ABC}$. Ma di qui si deduce $\mathrm{ABC} \supset \mathrm{ABD}$, poi che lo scambio dei punti C e D non infirma la verità dell'Ipts., come abbiam visto.]

P **34** — *Tr.* « Qualunque siano i punti non collineari A, B, C, se D ed E « sono punti del piano ABC, pur che non giacciano allineati con A, sarà giuoco- « forza che il piano ADE coincida col piano ABC. » [Per Ipts. abbiamo, che B ed A, come pure A e D, son diversi tra loro (P 22), e che uno almeno dei punti D ed E sarà escluso dalla congiungente A con B (P 19, 12, 23). Ora, se D non giace in AB, coincideranno i piani ABC e ABD, grazie al tr. precedente; e il punto E giacerà in conseguenza sul piano ADB (P 28), senza giacere in AD (P 22). Dunque, in virtù dello stesso tr. coincideranno anche i piani ADB, ADE; onde ABC = ADE. Di poi, se E non giace in AB, si deduce per egual modo che ABC = ABE = AEB = AED = ADE. E però in ogni caso ABC = ADE: c. v. d.]

P **35** — *Tr.* « Di nuovo essendo A, B, C punti non collineari; se avverrà che « tre punti D, E, F, eziandio non collineari, appartengano al piano ABC, bisognerà « che i piani ABC e DEF si confondano. » — Cfr. P 19. In breve: « Due piani, che abbian tre punti (non allineati) a comune, coincidono ». Ovvero: « Ciascun piano è individuato da tre de' suoi punti, che non sian per diritto fra loro ». [Non può darsi che siano collineari i punti A, D, E, e in pari tempo collineari anche i punti A, E, F e i punti A, D, F: poi che ciò implicherebbe l'esistenza di un allineamento fra i punti D, E, F (P 24), che è contro l'Ipts. Ora — se per es. i punti A, D, E non collimano — è forza concludere che ABC = ADE (P 34), vale a dire ABC = DEA (P 28), quindi che $\mathrm{F} \varepsilon \mathrm{DEA}$ e p. c. che i piani DEA, DEF coincidono (P 33): onde resta provata la coincidenza di ABC con DEF. E di qui nasce, attraverso le sostituzioni $\begin{pmatrix} F, E \\ E, F \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} F, D \\ D, F \end{pmatrix}$, che l'una o l'altra delle ipotesi 'A, D, F non collimano' ed 'A, E, F non collimano' richiederà che ABC si confonda con DEF, oppure con FED: dunque ABC = DEF in ogni modo.]

P **36** — *Tr.* « Dall'essere A, B, C punti non collineari e D, E punti non coin- « cidenti del piano ABC si deduce che la congiungente di questi, ossia la retta DE, « giace tutta nel piano ABC. » [Non potendo coesistere i tre allineamenti (D, E, A),

(D, E, B), (D, E, C) — perchè ne uscirebbero allineati anche i punti A, B, C (P 24) — sian per es. A, D, E non collineari. Allora coincideranno i due piani ABC, ADE (P 34): e la retta DE, che giace nel piano ADE (P 28), sarà dunque nel piano ABC. Ecc.]. — Appresso ne verrà fatto parlare dell' ente generico ' piano ' (o ' classe dei piani '); sottintendendo — è quasi superfluo il dichiararlo — una definizione simile a quella non ha guari proposta per l' ente ' retta ' (P 26).

P 37 — *Tr.* « Non posson coesister due piani distinti, ciascuno dei quali « contenga una retta data e un punto dato fuori di essa, ovvero due rette date le « quali s' incontrino senza coincidere: ma un piano soddisfacente a queste condi« zioni esiste per certo. » — Essendo r una retta ed A un punto esterno, il ' piano Ar ' (congiungente A con r) è quel piano — determinato ed unico — il quale congiunge A con due punti arbitrari di r, pur che diversi fra loro: giusta le P 27, 28, 35. Ecc.

P 38 — *Df.* « Quattro o più punti dati son da chiamar ' *complanari* ' o ' *com*« *plani* ', se esiste un piano che li contenga tutti ad un tempo: cioè se esiston tre « punti non collineari X, Y, Z, per modo che i punti dati appartengano ad XYZ » Cfr. P 21.

P 39 — *Tr.* « Quattro punti saranno per certo complani, se avviene che « tre di essi collimino, o due di essi coincidano. E se non son complanari, « converrà che ciascuno sia escluso dal piano degli altri tre. » Cfr. P 22. — L' esistenza di punti non complanari sarà stabilita più tardi. Vedi P 16 § 2.

P 40 — *Df.* « Un ' cerchio ' è la classe dei punti che giacciono sopra una « sfera, e al tempo stesso in un piano che ne contenga il centro. Il quale è « anche ' *centro* del cerchio '; mentre quel piano sarà il ' piano del cerchio '. » — Per es. nel piano di tre punti non collineari A, B, C, la classe dei punti che distan da A quanto B sarà un cerchio: e precisamente l' intersezione del piano ABC con la sfera B_A. — Pur che non s' incorra in ambiguità, questi medesimi simboli B_A, C_A ecc. denoteranno anche *cerchi*: così nell' es. predetto, se il discorso si aggira intorno a figure esistenti nel piano ABC (come spesso accade), allora il ' cerchio di B, centro A ' si può indicar tuttavia con ' B_A '.

Postulato XII.

P 41 — *Sulla retta che unisce due punti non coincidenti* A *e* B *vi sarà un qualche punto* M, *per cui la sfera di* A *circa* M *passi anche da* B. — O, sotto altra veste: « Per ogni coppia di punti A e B diversi l' uno dall' altro esisterà « qualche punto egualmente distante da A e da B e tale ancora, che nessun punto « diverso da quello dista da A e da B come quello ».

P 42 — *Tr.* « Un tal punto M è diverso da A e da B; e due punti quali M « non posson certo coesistere, se non coincidono ». [Invero, se M coincidesse con A, non potrebbe il punto B giacer sulla sfera A_M (P 9); se M coincidesse con B, la sfera A_M, in quanto passa per B, conterrebbe M (P 3), il che non può stare (P 8), poi che B (e con esso M) è diverso da A. Se ora esistesse in AB qualche punto N diverso da M eppur tale, che B appartenesse alla sfera A_N, il punto B risulterebbe

comune ad ambo le sfere A_M e A_N, mentre A giacerebbe sopra la retta MN (P 12. 19): due fatti contradittori, poi che nel secondo si afferma (P 11) che le sfere A_M e A_N non s'incontrano fuori di A.]

P **43** — *Df.* « Sempre che A, B siano punti e A diverso da B, si chiamerà « 'punto *medio* (o *centro*) della coppia A, B', ovver 'punto medio fra A e B', « quel punto della congiungente A con B — sia per esempio M — in ordine al « quale succede che la sfera di A, centro M, passa anche per B: ossia quel punto « di AB, dal quale A e B sono egualmente distanti. » (Che esista un tal punto e che ammetta una sola determinazione, è già detto nelle P 41, 42). « Ma se per l'opposto i punti A e B si confondono in uno, quest'uno sarà il 'punto medio, o centro, di (A, B)'. E, nell'un caso e nell'altro, il punto medio di (A, B) s'indicherà con 'A|B'. » — Osservate che uno stesso punto è centro di ambo le coppie (A, B) e (B, A), vale a dir che B|A = A|B. Ecc.

Postulato XIII.

P **44** — *Premesso che* A, B *sono punti e* A *diverso da* B; *la sfera di* B, *centro* A, *e la congiungente* A *con* B *s'incontrano ancora in un punto diverso da* B, *ma non posson tagliarsi in più punti diversi fra loro e da* B. — Cioè « Premesso ecc., esisterà sulla sfera B_A *un sol* punto S diverso da B, per cui le sfere « B_A ed S_B non s'incontrino fuori di S ». O, se ci piace: « Posto che i punti A e « B non coincidano, esiste *un sol* punto diverso da B, ma distante da A quanto B; « sotto condizione che nessun punto diverso da quello disti da A e da B come quello ». — Che il punto B appartenga sì all'una che all'altra figura, già si sa da P 6 e P 12: ma in P 44 si afferma, che l'intersezione di AB con B_A non si restringe a quel punto, anzi consiste in due punti, uno dei quali è B, l'altro è diverso da B (nè può coincidere con A, data la P 8 § 1).

P **45** — *Df.* « Sotto la stessa Ipts., la locuzione '*equinverso*, o *simmetrico, di* B *rispetto ad* A' vien posta a significare quel punto diverso da B, « che giace ad un tempo sulla sfera di B circa A e sulla congiungente A con B. « Vedi P 44. Ma se (contro il supposto) coincidono i punti A e B, la stessa frase « denoterà il punto A. E in ambo i casi il simbolo 'B/A' starà invece di 'simmetrico di B rispetto ad A'. » — Osservate che, detto M il punto medio di A e B, ciascuno di questi punti A e B sarà il simmetrico dell'altro rispetto ad M (saranno A e B punti l'un l'altro simmetrici rispetto ad M), e che, viceversa, da B' = B/A si deduce A = B|B' e per conseg. B = B'/A: vedi P 43. — « Dato « un punto A a piacere, quella relazione scambievole, o corrispondenza, che « intercede fra qualsivoglia punto ed il suo simmetrico rispetto ad A, si vuol « chiamar '*simmetria* rispetto ad A' od '*equinversione* rispetto ad A' (A « sarà il '*centro*' di simmetria). E 'simmetria rispetto ad un punto', od « 'equinversione' sarà il nome generico d'ogni corrispondenza siffatta. La simmetria rispetto ad A può indicarsi col simbolo '/A' »: essa costituisce una perfetta rappresentazione della classe 'punto' sopra sè stessa; è insomma una trasformazione univoca dei punti in punti; anzi una trasformazione conversiva o

reciproca, e di più involutoria (¹). — Da P 44 emerge anche il fatto, che nessun punto diverso da A è simmetrico di sè medesimo: cioè che, rispetto all'equinversione, nessun punto diverso dal centro è '*tautologo*'.

P 46 — *Tr.* « Qualunque sia il punto A, l'equinversione rispetto ad A converte in sè stessa punto per punto ogni sfera descritta intorno ad A come centro: « vale a dire, se B e C sono punti e C spetta alla sfera B_A, questa passa altresì per « i punti B/A e C/A. E similmente ogni $\left.\begin{matrix}\text{retta}\\\text{piano}\end{matrix}\right\}$ che passi per A è figura 'simmetrica « di sè medesima' (od 'autosimmetrica') rispetto ad A. » [Così da P 45, 17, 36, ecc.]

Postulato XIV.

P 47 — *Essendo* A, B, C *punti non collineari, le sfere* C_A, C_B *e il piano* ABC *s'incontrano ancora in un punto diverso da* C, *ma non posson tagliarsi in più punti diversi l'uno dall'altro e da* C. — Ovvero: « Se nel medesimo piano « due cerchi, non aventi il medesimo centro, s'incontrano fuor della linea dei centri, « essi avranno *due* punti a comune l'un l'altro distinti, e non più. Vedi P 40 ». Cfr. Eucl., lib. 3°, prp. X. — Ed anche potremo, secondo i gusti, adottar l'una o l'altra delle seguenti versioni: « Sul piano dei punti non collineari A, B, C deve « esistere un punto, che disti da A e da B quanto C, pur essendo diverso da C: ma « ogni altro punto del piano, il quale disti da A e da B quanto C, coinciderà con « quello o con C » — « Premesso che A, B, C sono punti, A diverso da B; se qualche « punto diverso da C disti da A e da B quanto C, allora esiste *un sol* punto diverso « da C, che dista da A e da B quanto C sotto condizione, che nessun punto diverso « da quello disti dagli A, B, C come quello ». La quale ultima forma ha il pregio di escludere i termini non primitivi 'retta', 'piano'. 'sfera', 'collineari', ecc.

P 48 — *Tr.* « E presi a piacere due punti D ed E sulla retta che unisce A « con B, sempre che questi punti D ed E non coincidano, bisognerà che la coppia « dei punti comuni ad ambo le sfere C_D e C_E e al piano ABC si confonda con quella « dei punti comuni ad ambo le sfere C_A, C_B e al piano ABC. » [Invero ambo i cerchi descritti dal punto C intorno a D ed E sul piano ABC (P 40) passeranno dai punti comuni alle sfere C_A e C_B e al piano ABC, poichè vi passan le sfere C_D e C_E — grazie a $\begin{pmatrix}D, C\\C, M\end{pmatrix}$ P 16 e $\begin{pmatrix}E, C\\C, M\end{pmatrix}$ P 16 — e non avranno altri punti a comune, in virtù di $\begin{pmatrix}D, E\\A, B\end{pmatrix}$ P 47.]

P 49 — *Df.* « Di nuovo essendo A e B punti diversi fra loro, C un punto « escluso dalla congiungente A con B; per '*simmetrico di* C *rispetto ad* AB' « s'intende quel punto del piano ABC, che appartiene ad ambo le sfere C_A e C_B, « ma è diverso da C. E se al contrario C è punto di AB, allora il 'simmetrico di « C rispetto ad AB' sarà per dfnz. lo stesso punto C. Il punto così definito si rap- « presenta col simbolo C/AB. » — Le P 47, 48 stanno a far fede, che un siffatto

(¹) Vedi la nota IV in Appendice.

punto esiste ed è *uno*; e che non tanto è subordinato alla coppia di punti A, B, quanto alla lor congiungente AB. — Sarà manifesto anche qui, come dianzi, che se C' è il simmetrico di C rispetto ad AB, alla sua volta C è il simmetrico di C' — Se dunque r è una retta e C un punto arbitrario, è già detto oramai che s' intenda per « *simmetrico di* C *rispetto ad* r ». Ciò significa « il punto C, se questo appartiene ad r; se no quel punto diverso da C, che a tenor delle P 47, 48 è comune alle sfere di C intorno a due punti A e B di r (non importa quali, purchè diversi fra loro) e al piano ABC ». — « Data una retta r a piacere, la relazione o corri- « spondenza — simboleggiata in '/r' — che intercede fra ciascun punto e il sim- « metrico rispetto ad r prende nome di '*simmetria rispetto ad* r', o '*semigiro* « *intorno ad* r' (r è l' '*asse* di simmetria'). E 'simmetria rispetto a una retta', « 'simmetria assiale', '*semigiro* intorno ad un asse', ecc. sarà il nome ge- « nerico d' ogni corrispondenza siffatta » — La 'simmetria rispetto ad r' (r essendo una retta) è una perfetta rappresentazione della classe 'punto' sopra sè stessa, una 'trasformazione univoca, reciproca e involutoria dei punti in punti': in quanto coordina a ciascun punto un punto ed uno solo, in maniera che un punto dato a piacere è sempre il simmetrico d'un certo punto, e non di più punti diversi; e inoltre ogni punto è il simmetrico del suo simmetrico. — Emerge ancora da P 47 — avuto riguardo a P 23 — che, sebben per effetto della simmetria onde si parla ciascun punto dell'asse *è tautologo*, cioè convertito in sè stesso (il semigiro 'tien fermo' ogni punto dell'asse) fuor di quest'asse di simmetria non esiste alcun punto tautologo (¹).

P 50 — *Tr.* « La simmetria rispetto ad un asse dee convertire in sè stessa « punto per punto ogni sfera, che abbia il centro sull'asse, e in sè stesso ogni piano « che passi per questa retta. » [Siano A un punto arbitrario dell'asse r, C un punto escluso da questa retta e D un punto a piacere sopra la sfera C_A: dico che il punto D/r, simmetrico del punto D rispetto ad r, giacerà su quella medesima sfera. Invero, se D fosse per avventura un punto comune alla retta e alla sfera, quel punto D/r coinciderebbe con D sulla sfera (P 49). Ora, se D non appartiene ad r, il suo simmetrico sarà tenuto a giacere sul piano Dr, che unisce D con r, e sopra ogni sfera che abbia il centro in r e passi per D (P 48, 49): dunque ancor sulla sfera C_A. Il resto al Lettore.]

P 51 — *Df.* « Dati tre punti non collineari A, B, C, per '*ribaltamento* del « piano ABC su sè stesso, intorno ai punti A e B come cardini' — o 'intorno « alla retta AB come pernio' — s'intenderà quella mutua corrispondenza fra i « punti del piano ABC (simmetria *del piano* ABC *con sè stesso*, rispetto alla retta « AB come asse), che viene implicata dal semigiro intorno ad AB, giusta la prps. « precedente. »

POSTULATO XV.

P 52 — *Essendo* r *una retta e* C *un punto escluso da questa, se per due punti* D *ed* E *si verifica, che* E *stia sulla sfera di* D *circa* C, *sarà giuocoforza che il*

(¹) Vedi Nota IV in Appendice.

punto E/r *appartenga alla sfera del punto* D/r *intorno al punto* C/r. — Oppure: « Ogni qualvolta due punti sono equidistanti da un terzo, eziandio i loro simmetrici « rispetto a un asse arbitrario equidistano dal simmetrico del terzo punto ». Vedi P 50. — Quindi è che per simmetria rispetto ad un asse ogni sfera si specchierà in una sfera, e il centro dell'una avrà come immagine il centro dell'altra: vale a dire, se quanti si vogliano punti disteranno egualmente da un medesimo punto C (giaccia o no questo sull'asse di simmetria), così anche i loro simmetrici dal punto, che corrisponde a C. — Chi volesse eliminare dall'anzidetto principio (per mezzo delle dfnz. precedenti) ogni traccia di locuzione geometrica non primitiva, potrebbe sempre enunciarlo, ad es., sotto quest'altra forma:

« Dati i punti A, B, C, D, E, con A diverso da B, e D, E equidistanti da C: « se tre punti C', D', E' sono tali, che ognuna delle tre coppie (C, C'), (D, D'), « (E, E') soddisfi alla condizione: " X' è diverso da X, ma dista da A e da B quanto « X; e nessun punto diverso da X' dista dagli A, B, X quanto X' ": oppur se una « tal condizione si avvera soltanto nei punti C e C', D e D'; laddove E' = E, e non « esiste alcun punto diverso da E, che disti da A e da B quanto E: allora anche « i punti D' ed E' disteranno egualmente dal punto C' ».

P **53** — *Tr.* « Per effetto di simmetria rispetto ad un asse, più punti collineari si specchiano sempre in punti eziandio collineari; vale a dire ogni retta « si rappresenta in una retta; e allo stesso modo i simmetrici di tutti i punti d'un « piano riproducono un piano. » [Siano A e B punti dati a piacere purchè non coincidenti, ed X un punto arbitrario della lor congiungente: il punto A' ≡ A/*r* (*r* essendo una retta arbitraria) sarà diverso dal punto B' ≡ B/*r* (P 47, 48, 49). Si vuol dimostrare, che il punto X' ≡ X/*r* è tenuto a giacer sulla retta A'B'. Infatti le sfere X_A ed $X'_{A'}$ n'esciranno simmetriche l'una dell'altra rispetto ad *r* (P 52), per modo che ciascun punto dell'una si specchia in un punto dell'altra e viceversa, senza eccezione o restrizione di sorta: e lo stesso è da dire circa le sfere X_B e $X'_{B'}$. Se dunque le sfere $X'_{A'}$ e $X'_{B'}$ avesser di comune alcun punto diverso da X' — puta caso un punto Y' — similmente le sfere X_A e X_B dovrebber tagliarsi in un punto diverso da X, vale a dir nel simmetrico di Y': il che non è per Ipts. (P 11). Dunque X' appartiene alla congiungente di A' e B' (ivi). — Ora poniamo che C sia un punto straniero alla congiungente A con B, e che X denoti un punto qualsiasi del piano ABC: con argomentazione in tutto simile alla precedente e appellandosi a P 27 si proverà che il punto X' è obbligato a giacere sul piano A'B'C'. Sicchè le due rette AB e A'B', come pure i due piani ABC e A'B'C' son figure simmetriche l'una dell'altra rispetto all'asse *r*: ecc.]

P **54** — *Tr.* « Ogni qualvolta due punti son simmetrici l'uno dell'altro rispetto « ad un asse, il lor punto medio appartiene a quest'asse. E ogni retta simmetrica « di sè medesima taglierà l'asse in un punto (seppur non coincide con l'asse). » [I punti dati siano C e D, ed *r* sia l'asse di simmetria: si può conceder che C non appartenga ad *r*. Pongasi E ≡ C|D (P 43). Il semigiro intorno ad *r* commuta i punti C e D fra loro, quindi converte in sè stessa la retta CD (P 53, 12): onde il simmetrico di E rispetto ad *r* — sia per es. F — dovrà appartenere a CD. Inoltre alla sfera C_E corrisponde la sfera D_F (P 52): e poichè quella passa per D (P 43) con-

verrà che quest'altra passi per C. Dunque F sarà il punto medio fra i punti D e C (ivi), per la qual cosa F coinciderà con E (P 42). Ma nessun punto esterno all'asse r può coincidere col suo simmetrico (P 49): dunque E appartiene ad r. — E pertanto ogni retta s, la quale sia convertita in sè stessa dal semigiro intorno ad r e non si confonda con r, dovrà tagliar questa in un punto: visto che in s ci sarà sempre un punto esterno ad r; ed s coinciderà con la retta che unisce un tal punto col suo simmetrico rispetto ad r (P 19).]

P 55 — *Tr.* « Se per tre punti non collineari A, B, C si dà il fatto, che C « appartenga alla sfera di B, centro A, nessun punto diverso da B e da C potrà « esser comune alla sfera B_A e alla retta BC. » — Insomma 'una retta non può incontrare una sfera in più di due punti distinti'. Vedi P 44. [Osservate che la simmetria rispetto a BC converte in sè stesso ogni punto di questa retta; per la qual cosa, considerando a tenor di P 52 la sfera $B_{A'}$ che il semigiro intorno alla retta BC contrappone alla sfera B_A (A' essendo il simmetrico del punto A) è forza concludere che ciascun punto comune alla sfera B_A e alla retta BC deve eziandio appartenere alla sfera $B_{A'}$. D'altra parte i punti A e A' son diversi fra loro. (Ipts. e P 47, 49); nè può darsi che il punto B appartenga alla congiungente AA', dal momento che un punto diverso da B (voglio dire il punto C) è comune ad ambo le sfere B_A e $B_{A'}$. Dunque i punti A, B, A' non collimano; e per conseg. ogni punto comune alla retta BC e alla sfera B_A sarà sempre comune alle sfere B_A e $B_{A'}$ e al piano ABA', vale a dire comune ai due cerchi B_A e $B_{A'}$ di esso piano. Ma questi cerchi, passando per B e per C, non s'incontrano altrove (P 47): dunque nessun altro punto è comune a quelle figure, c. v. d.]

§ II.

Ortogonalità fra due rette, o fra una retta ed un piano, o tra due piani. S'introduce la rotazione intorno ad un asse. Simmetria rispetto ad un piano o specchiamento. Proprietà diverse in ordine a rette, piani e sfere.

P 1 — *Tr.* « Sempre che i punti A e B non coincidano: qualunque volta due « punti l'un l'altro simmetrici rispetto ad A disteranno egualmente da B, saranno « anche simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla congiungente A con B. » [Siano C e C' quei punti, e C diverso da A, quindi anche da C' (P 44, 45 §1). L'Ipts. che questi punti appartengano, sì l'un come l'altro, alle sfere C_A, C_B e alla retta CA, farà esser C esterno alla congiungente A con B, e C' sul piano ABC (P 11, 28 § 1): onde C' = C/AB (P 49 § 1).]

P 2 — *Tr.* « Se, essendo A, B, C punti non collineari, il simmetrico di C ri- « spetto ad AB stia nella retta CA, sarà tutt'uno col simmetrico di C rispetto ad « A. » [Posto C' ≡ C/AB, il punto medio fra C e C' dovrà giacere ad un tempo in AB e in CC' (P 54, 43 § 1). Ma CC' = CA, dal momento che per Ipts. C' appartiene a CA, ma è diverso da C (P 17, 22, 49 § 1). Dunque esso punto coinciderà con

A, poichè questo è il solo punto comune alle rette AB e CA: e d'altra parte il fatto che A = C|C' involge C' = C/A (P 45 § 1).]

Di qui e dalle P 53, 54 § 1 si raccoglie il seguente:

P 3 — *Tr.* « Premesso che i punti A, B, C non collimano, due qualunque delle « condizioni: 1) 'il punto C/A appartiene alla sfera C_{B}'; 2) 'il punto C/AB spetta « alla congiungente CA'; 3) 'i punti C/A e C/AB coincidono' sono sempre impli- « cate dalla condizione che resta. Inoltre il verificarsi d'una qualunque di esse in- « volgerà senza più, che il semigiro intorno la retta AB converta in sè stessa la « congiungente AC — e viceversa ».

P 4 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., se il semigiro intorno ad AB converte in « sè stessa la AC, reciprocamente la AB sarà convertita in sè stessa dal semigiro « intorno ad AC. » [Sia C' = C/A, B' = B/A: si dimostra che il punto B' non differisce dal simmetrico del punto B rispetto alla retta CA — dopo di che basterà richiamarsi a $\begin{pmatrix} C, B \\ B, C \end{pmatrix}$ P 3. Invero, detti B" ed M i punti B/AC e B|B", si sa da una parte che M appartiene ad AC (P 54 § 1) e dall'altra che il semigiro intorno ad AC tien fermo C' e scambia le sfere C_{B} e $C_{B''}$ fra loro (P 52 § 1): onde il punto C', in quanto appartiene a C_{B} per Ipts., dovrà eziandio appartenere a $C_{B''}$. Ma dall'essere C' un punto comune alle sfere C_{B} e $C_{B''}$ ed M un punto giacente in BB", ne vien che C' appartiene alla sfera C_{M}, giusta $\begin{pmatrix} B', M, C \\ A, C, M \end{pmatrix}$ P 16 § 1. Dunque M coincide col punto medio fra C e C', e però si confonde con A (P 45 § 1): dunque sarà B" il simmetrico di B rispetto ad A, che è quanto dir B" = B': c. v. d.]

P 5 — *Df.* « Quando si parla di rette, la locuzione '*r* è *perpendicolare* « *ad s*' — simboleggiata in '$r \perp s$' — serve ad esprimer qualmente la retta *r* « è simmetrica di sè medesima od autosimmetrica rispetto alla retta « *s*, ma non coincide con questa ». — Ved. P 49, 53 § 1. — O, in altri termini: « Essendo *s* una retta, si dirà '*perpendicolare*, *ortogonale*, o *normale*, « *ad s*' ogni retta (diversa da questa) che per mezzo del semigiro intorno ad *s* « ricada su sè medesima ». — In P 54 § 1 già si afferma implicitamente che, se una retta è perpendicolare ad un'altra, le due rette si taglieranno in un punto. Ma dalla P 3 emerge altresì che, date due rette *r*, *s* concorrenti in un punto — sia per es. A — a certificarsi che l'una *r* è normale all'altra *s* basterà confermar l'esistenza d'un punto il quale, giacendo in *r* ma fuori di *s*, disti da un punto di *s* — non importa quale, purchè diverso da A — quanto il suo simmetrico risp.° ad A; oppur sia tale, che il suo simmetrico risp.° ad *s* non esca da *r*; o tale, che i suoi simmetrici risp.° ad A e ad *s* coincidano.

P 6 — *Tr.* « Se una retta è perpendicolare ad un'altra, alla sua volta quest'altra « è perpendicolare alla prima: cioè le due rette saranno 'perpendicolari fra loro' ». [Sia la retta *r* perpendicolare alla retta *s*, ed A denoti il loro punto comune (P 5). Sulla *r* esiste per certo un punto C e sulla *s* un punto B, l'uno e l'altro diversi da A (P 26 § 1); onde *r* = AC, *s* = AB: e tre punti A, B, C così fatti non sono per certo allineati, dal momento che *r* è diversa da *s*. Ora, poichè il semigiro intorno ad AB converte in sè stessa la AC (P 5), non v'è altro che da richiamarsi a P 4].

P 7 — *Tr.* « Ogni qualvolta le rette r, s sian perpendicolari fra loro, se si « toglie in una qualunque di esse — p. es. in r — un punto C a piacere, purchè « diverso dal punto comune A, allora: 1) Il simmetrico di C risp.° ad s sarà sempre « in r e si confonderà col simmetrico di C risp.° ad A; 2) I punti C e C/A diste- « ranno egualmente da ciascun punto di s ». Eucl., lib. 3.°, prp. III. [Il punto C/s dovrà cader sulla retta CA, posto che per Ipts. questa è simmetrica di sè medesima rispetto ad s. Ora, tolto anche in s un punto B a piacere, purchè diverso da A (e visto, come dianzi, che i punti A, B, C non collimano), potremo appellarci a P 4: ecc.].

P 8 — *Tr.* « Se di nuovo A, B, C siano punti non collineari, e la retta AC « perpendicolare alla AB, non si può dar che la sfera di A centro B e la congiun- « gente A con C s'incontrino fuori del punto A ». Eucl., lib. 3°, prp. XVI. [Se esistesse un punto diverso da A, ma come questo comune alle A_B ed AC, bisognerebbe che il suo simmetrico intorno la retta AB fosse un punto eziandio comune a quelle figure; però che ognuna di esse è convertita in sè stessa dal semigiro intorno ad AB (P 50 § 1, P 5). Esisterebbero dunque tre punti al tutti diversi fra loro e comuni alla retta e alla sfera: il che non può darsi (P 55 § 1)].

P 9 — *Tr.* « Dati a piacere una retta r e un punto esterno C, si può sempre « trovar sulla retta un tal punto A, per cui la retta CA sia perpendicolare ad r: « ma in r non posson coesister due punti A e B l'un l'altro distinti e tali, che « ognuna delle due rette CA e CB sia ortogonale ad r ». — È quanto dire che « Da « un punto esterno si può abbassare, o calare, una retta perpendicolare alla « data, ma non più d'una ». Eucl., lib. 1°, prp. XII. [Tolgasi il punto C', simmetrico del punto C rispetto ad r; indi il punto medio fra C e C', che chiameremo A. Questo punto dovrà giacere in r (P 54 § 1); e la retta CA sarà perpendicolare alla r, in virtù di P 4, 5. — Di poi, se esistesse in r qualche altro punto B, per cui fosse egualmente CB perpendicolare ad r, la simmetria rispetto ad r convertirebbe ciascuna delle CA, CB in sè stessa (P 5): dunque in sè stesso anche C, poichè questo è il solo punto comune a quelle due rette (P 19 § 1, ecc.). Ma il punto C, come esterno all'asse r, non è rispecchiato in sè stesso (ivi). Dunque un tal punto B non esiste].

P 10 — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C; se avvien che la congiun- « gente A con C e la sfera di A circa B — oppure la congiungente di A con B « e la sfera di A centro C — non s'incontrino fuori di A, bisognerà che le rette « AC ed AB sian perpendicolari fra loro ». Eucl., libro 3°, prp. XVIII. Poniamo che AC non sia perpendicolare ad AB. Vi sarà dunque in AC un punto diverso da A, e sia p. es. D, per cui la retta BD è normale alla retta AD (P 9): onde questa, per effetto del semigiro intorno a BD ricadrà su sè stessa (P 6, 5); ed A verrà in qualche punto, certamente diverso da A. Ora, un tal punto dovrebbe stare ad un tempo così nella retta AD, come sulla sfera A_B (P 50 § 1, ecc.): la qual cosa è contraria all'Ipts., però che la AD si confonde con la retta AC (P 17 § 1). Dunque AC ⊥ AB; ecc.] — La presente e la P 8 insieme congiunte fanno il teorema: « Acciò che una retta e una sfera passanti per un medesimo punto *si tocchino* (siano *tangenti* fra loro) *in questo* — cioè non s'incontrino altrove — è ne-

cessario e basta, che quella retta sia ortogonale alla congiungente il detto punto col centro della sfera ».

P 11 — *Tr.* « Se è vero ad un tempo che i punti A, B, C non collimano; « che D sia un punto del piano ABC, per altro esterno alla retta AB e diverso da « C; e che le rette AC e AD sian l'una e l'altra perpendicolari alla AB: sarà vero « altresì che i punti A, C, D collineano ». — Qui abbiamo insomma la prps. che si suole enunciare dicendo: « Ad una retta data e da un punto dato in essa non si potranno elevare, in un medesimo piano con questa retta, due diverse perpendicolari ». [Sia B' il simmetrico di B rispetto ad A. Perchè la AC è normale alla AB, i punti B e B' saranno equidistanti da C (P 7); e perchè la AD è normale alla AB, saranno eziandio equidistanti da D: insomma comuni alle sfere B_c e B_D; sicchè B non appartiene alla retta CD (P 11 § 1, ecc.). Ma essi giacciono ancora sul piano BCD, che non differisce dal piano ABC (P 28, 33 § 1): sono dunque simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse CD (P 49 § 1), onde il lor punto medio A appartiene a CD: c. v. d.].

P 12 — *Tr.* « Sempre che A, B, C siano punti non collineari, se più sfere pas- « santi per A e per B sono tali, che i loro centri appartengano al piano ABC, questi « centri saranno tutti allineati sopra una retta perpendicolare alla congiungente A « con B nel punto medio di A e B ». [Invero — detto M un tal punto medio — se D, E, F, ..., saranno punti del piano ABC diversi da M, e ciascuno egualmente lontano da A e da B; le rette MD, ME, MF, ..., tutte quante normali in M alla AB (P 5), coincideranno tutte in una sola, grazie a P 11].

POSTULATO XVI.

P 13 — *Se* A, B, C *sono punti non collineari, esiste almeno una sfera che passa per* A *e per* B, *ed ha il centro nel piano* ABC, *ma fuori della congiungente* A e B. — Ovver, che è lo stesso: « Due punti dati a piacere in un « piano e diversi fra loro equidistano sempre da qualche punto del piano, esterno « alla lor congiungente ». Cfr. P 41 § 1. — È sotto forma primitiva (ossia sciolta da ogni legame con le definizioni precedenti): « Premesso che A, B, C sono punti, « A diverso da B; se qualche punto diverso da C dista da A e da B quanto C, « dovrà esistere un punto, dal quale disti A quanto B, sotto condizione che « qualche punto diverso da quello disti da A e da B come quello, ma nessun punto « diverso da quello disti da ognuno degli A, B, C come quello ». Cfr. P 41 § 1.

P 14 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., sempre esiste nel piano ABC, ma fuor « della retta AB, qualche punto D per cui la retta DA sia normale alla AB ». — O, sotto altra veste: « Dati a piacere un piano, in questo piano una retta e in questa retta un punto, si può sempre in quel piano e per questo punto innalzare (o elevare) una retta perpendicolare alla data ». — EUCL., lib. 1°, prp. XI. [Che non si possan condurre da A e nel piano ABC due diverse perpendicolari ad AB, già si sa da P 11. — Ora tolgasi il punto B', simmetrico di B rispetto ad A; e nel dato piano ABC sia D un punto equidistante da B e B', ma diverso da A (P 13): la retta AD sarà perpendicolare alla AB (P 4, 5)]. — E di qui si può tosto concludere — avuto riguardo alla P 6, 7, 12 — che:

P 15 — *Tr.* « Il luogo geometrico d'un punto equidistante da due punti « dati (l'un l'altro distinti) e giacente in un piano dato che passi per questi, è una « retta; anzi è la retta perpendicolare alla congiungente dei punti stessi nel loro « punto medio ».

Postulato XVII.

P 16 — *Sempre che gli* A , B , C *siano punti non collineari, esisterà un punto almeno, le di cui sfere intorno* A , B , C *si taglino in qualche altro punto diverso da quello.* — Insomma (P 27 § 1): « Dato a piacere un piano, esisterà tuttavia qualche « punto, che non appartiene al piano ». Cfr. P 15 § 1. — Nè vi sono difficoltà per tradurre codesta prps. nel linguaggio primitivo del 'punto' e dell' 'equidistanza': « Purchè A , B , C siano punti, A diverso da B; se qualche punto diverso da C « dista da A e da B quanto C, vi saranno almeno due punti diversi fra loro, cia- « scuno dei quali dista da A, da B e da C quanto l'altro ».

P 17 — *Tr.* « Se una retta è perpendicolare a due altre rette che si segano, nel « loro punto d'intersezione, sarà eziandio perpendicolare ad ogni retta che giaccia « nel piano di queste e passi dal loro punto comune ». — Eucl., lib. 11°, prp. IV. [Siano A , B , C punti non collineari; D un punto del piano ABC, non però coincidente con A; ed M un punto fuor di esso piano. Se avverrà che ciascuna delle due rette AB , AC sia perpendicolare alla congiungente A con M, dico che questa sarà perpendicolare alla AD. Tolgasi il punto N = M/A. Perchè la retta MA è ortogonale alla AB, converrà che i punti M , N equidistino dal punto B (P 7); e perchè la stessa MA è altresì perpendicolare alla AC, converrà che quei punti M , N equidistino ancora dal punto C. Dunque ognuno dei punti A , B , C sarà equidistante dai punti M , N e p. c. anche il punto D, in quanto giace sul piano ABC (P 32 § 1). Or dunque AM ⊥ AD (P 5): c. v. d.].

P 18 — *Df.* « Una retta si dice '*perpendicolare*, o *normale*, ad un « *piano*', quando è normale a tutte le rette che la incontrano e sono nel piano ». — Eucl., lib. 11°, dfnz. III. Onde il Tr. prec. prende anche la forma: « Qualunque volta una retta è perpendicolare a due rette che si segano nel loro punto comune, è altresì perpendicolare al piano che le contiene. Ved. P 37 § 1 ». Se una retta è normale ad un piano, questo e quella s'incontreranno di certo; ma la retta non può giacere nel piano (P 27, 36, 19, 21, 26 § 1 e P 11).

P 19 — *Tr.* « Non si posson tirare da un punto esterno due diverse perpendico- « lari ad un piano ». — Ovvero: Se A , B , C , D sono punti non complanari, è impossibile che le DA , DB siano insieme perpendicolari al piano ABC ». — Eucl., lib. 11°, prp. XIII. [Se queste rette fossero insieme perpendicolari al piano ABC, sarebbero ancora, sì l'una e sì l'altra, normali alla congiungente A con B (P 18): il che non può darsi (P 9). Ved. P 38, 39 § 1.

Postulato XVIII.

P 20 — *Qualsiasi sfera s'incontra con ogni retta, che ne contenga il centro.* — Ovver, che è lo stesso: « Se A , B , C sono punti non collineari, esisterà qualche

« punto comune alla sfera di B circa A e alla congiungente A con C ». — « Se, « essendo A, B, C punti dati e A diverso da B, vi sarà qualche punto diverso da « C, che disti da A e da B quanto C; deve esistere un punto che disti da A quanto « B sotto condizione, che nessun punto diverso da quello disti da A e da C come quello ». — Per la qual cosa, avuto riguardo a P 44 § 1:

P 21 — *Tr.* « Una sfera qualsivoglia e una retta, che ne contenga il centro, « si taglieranno in due punti l'un l'altro distinti e simmetrici rispetto al « centro ».

P 22 — *Df.* Essendo r una retta, il nome generico di "*rotazione intorno* « *ad r*" è per significare la risultante o prodotto dei semigiri intorno a due « rette diverse, perpendicolari sì l'una che l'altra alla retta r in un medesimo punto « (ma del resto arbitrarie). 'Asse di rotazione' è questa retta r. Ved. P 49 § 1 e « P 5 ». Osservate che qualsivoglia rotazione sarà sempre una trasformazione univoca e reciproca dei punti in punti, come il semigiro; e che, dati gli assi u e v dei due semigiri componenti una certa 'rotazione intorno ad r', e noto anche l'ordine in cui si succedon quei due semigiri, la rotazione onde si parla n'escirà pienamente individuata: ma il prodotto di $/u$ per $/v$ — cioè la rotazione che nasce eseguendo prima $/u$ e poi $/v$ — differisce per solito dal prodotto di $/v$ per $/u$; le due operazioni composte essendo l'una inversa dell'altra, come apparisce dall'eguaglianza simbolica: $/u \,.\, /v \,.\, /v \,.\, /u = /u \,.\, \{/v\}^2 \,.\, /u = /u \,.\, /u = 1$. Cosicchè la trasformazione inversa d'una rotazione qual si voglia è ancora una rotazione. Ecc. (¹).

P 23 — *Tr.* « Come il semigiro, così anche la rotazione intorno ad un « asse coordina sempre a più punti equidistanti da un punto dato a piacere « altri punti eziandio equidistanti da un medesimo punto; e cioè rappresenta sfere « con sfere in modo, che i centri di sfere omologhe son punti omologhi: onde a « punti allineati corrispondono punti allineati, a complanari, complanari; « a coppie di rette ortogonali altre coppie di rette eziandio perpendicolari « fra loro; ecc. Inoltre la rotazione (come il semigiro) tien fermo ogni punto dell'asse, e « converte in sè stessa ogni sfera, che abbia il centro sull'asse ». [Siano come dianzi le rette u e v perpendicolari alla retta r in un medesimo punto A e diverse fra loro. Se d'un punto qualsivoglia M togliamo prima il simmetrico rispetto ad u — che sia p. es. M' — poi di questo il simmetrico rispetto a v — che sia p. es. M'' — sarà precisamente M'' l'immagine del punto M in virtù della rotazione $/v \,.\, /u$, prodotto di $/u$ per $/v$. Or se più punti E, F, G, ... equidistano dal punto M, similmente i punti E', F', G', ... disteranno egualmente dal punto M' (P 47, 49 § 1); e per la stessa ragione i punti E'', F'', G'', ... dal punto M'': cioè la trasformazione suddetta cangia punto per punto la sfera E_M nella fera $E''_{M''}$. E di qui — argomentando siccome in P 53 § 1 — facilmente si trae, che a qualunque retta dee corrispondere punto per punto una retta, a ciascun piano un piano; al punto medio d'una coppia di punti quali che siano il punto medio della coppia omologa — e p. c. (P 5, 7 ecc.) ad ogni coppia di rette perpendicolari fra loro una coppia di rette eziandio

(¹) Vedi la nota IV.

perpendicolari: ecc. — Di poi, preso un punto B a piacere sull'asse di rotazione r, il punto B' simmetrico di B rispetto ad u coinciderà col punto B/A, dal momento che $r \perp u$; quindi il punto B'/v (ossia B″) col punto B, visto che $r \perp v$: onde il punto B è t a u t o l o g o. — Infine, qualunque sfera descritta intorno a B come centro dovrà tagliar l'asse r in due punti (P 21): uno di questi sia p. es. C. Ora, per ciò che si è detto, alla sfera C_B corrisponde la sfera $C''_{B''}$; ed inoltre B = B″ e C = C″: dunque la sfera C_B si converte in sè stessa (P 2, 3, 4 § 1); ecc. ecc.].

P **24** — *Tr.* « Se essendo A, B, C, D quattro punti non complanari, le rette « AB, AC sian perpendicolari alla AD e il punto C disti da A quanto B; allora i « punti B e C disteranno egualmente da D ». [Pongasi E ≡ D/A ed F ≡ B|C. Il punto F è diverso da A, perchè i punti A, B, C non collimano (P 39 § 1, ecc.); e la retta BC perpendicolare alla retta FA (P 3, 5), mentre i punti B e C sono l'un l'altro simmetrici rispetto a questa FA. Inoltre la retta DA, perpendicolare ad ambo le rette AB, AC per Ipts., sarà eziandio perpendicolare alla retta FA (P 18, ecc.); e p. cons. i simmetrici del punto D rispetto ad A e rispetto alle AB, FA si confonderanno in un solo e medesimo punto E (P 7). Ne viene che il semigiro intorno ad AB tiene fermo B e conduce D in E, specchiando B_D su B_E (P 52 § 1); laddove il semigiro intorno ad AF porta B in C e ripone E in D, specchiando B_E su C_D. Dunque l'operazione, o trasformazione, c o m p o s t a mercè questi due semigiri — ossia la risultante, o prodotto, di /AB per /AF — rappresenta punto per punto la sfera B_D sulla sfera C_D. D'altra parte questa rotazione dee convertire in sè stessa la sfera B_D (P 22, 23): e però si conclude, che le due sfere B_D e C_D si confondono in una. Dunque è vero che C appartiene a B_D: c. v. d.].

P **25** — *Tr.* « Di nuovo essendo A, B, C, D punti non complanari; se avvien « che la retta BA sia perpendicolare ad ambo le rette AC, AD, e la AC perpendi- « colare alla retta CD, sarà inoltre CD perpendicolare alla retta BC e per cons. « normale al piano ABC. Ved. P 18 ». — Questo il teorema ' delle tre perpendicolari ', che si prova come in Legendre, *Elementi di Geometria*, lib. 5°, prp. IV. [Tolgasi E ≡ D/C. Perchè CD ⊥ CA, i punti D, E saranno egualmente distanti da A (P 3, 5); e perchè la BA è normale a ciascuna delle AC, AD, dunque normale alla AE (P 17), potremo invocare la $\binom{D\,,\,E\,,\,B}{B\,,\,C\,,\,D}$ P 24, in virtù della quale i punti D ed E saranno eziandio equidistanti da B: onde CD ⊥ CB (P 3, 5); ecc.].

P **26** — *Tr.* « Si può sempre da un punto dato esterno ad un piano abbassare una « retta perpendicolare al piano ». — Eucl., lib. 11°, prp. XI. [Sia il dato punto D. Nel piano dato esistono per certo tre punti non collineari A, B, C (P 27 § 1); e sulla congiungente A con B vi sarà senza fallo anche un punto — sia per es. A — per cui la retta DA riesce normale alla AB (P 9). Di poi sul piano ABC, ma fuor della retta AB, deve esistere un punto — e sia p. es. C — tal che CA ⊥ AB (P 14). Or se la retta DA risultasse per avventura, normale ad AC, sarebbe essa stessa la perpendicolare al piano dato. Ma se così non è, si può nondimeno trovar nella retta CA qualche punto diverso da A — e sia questo ad es. C — per cui DC ⊥ CA (P 9): e dopo ciò la P 25 ne assicura, che una tal retta DC è senza fallo normale al piano ABC. Ecc.].

P 27 — *Tr.* « Sempre che gli A, B, C, D siano punti non complanari, esiste « almeno una rotazione intorno la retta AB, mercè della quale C si rappresenta in « un punto del piano ABD. — Ved. P 22 ». [Si può concedere che A sia quel punto di AB, per cui CA ⊥ AB (P 9); e che AD sia la retta perpendicolare innalzata da A alla AB nel piano ABD (P 11, 14). Questa retta ne incontra per certo la sfera C_A (P 20): uno dei punti comuni sia p. es. E. Infine denoti F il punto C|E, per certo diverso da A. Ora, poichè la retta BA è supposta normale a ciascuna delle AC, AE, sarà eziandio perpendicolare alla congiungente A con F (P 17); anzi i punti C ed E n'esciranno l'un l'altro simmetrici rispetto a codesta FA: per la qual cosa i due semigiri intorno alle AC, AF, composti fra loro in quest'ordine, produrranno una rotazione intorno ad AB come asse, in virtù della quale C si trasferisce in E, ossia nel piano ABD].

P 28 — *Tr.* « Da un punto dato in un piano si può sempre innalzare una retta « perpendicolare al detto piano ». — Eucl., lib. 11°, prp. XII. [Sia dato il piano σ, e un punto A in esso: si vuol trovare una retta che passi per A e sia perpendicolare a σ. Tolgasi in questo piano un punto B a piacere, purchè diverso da A (Non si può negar l'esistenza di punti distinti nel piano: atteso che, per es., il giudizio 'σ è un piano' non differisce dall'altro 'esiston tre punti non collineari A, B, C. e σ ≡ ABC: cfr. P. 26 § 1). Ora è certo che esiste anche un punto escluso da σ (P 16), e p. c. anche un piano — sia p. es. τ — diverso da σ e contenente la retta AB come σ. In quest'altro piano conducasi la retta AD perpendicolare alla AB (P 14); e poi similmente in un piano, il quale contenga eziandio quella retta AD, ma non si confonda con τ, tirisi AC perpendicolare ad AD: così che la medesima AD sia normale ad ambo le rette AB, AC. Se il punto C e p. c. la retta AC cadessero in σ, sarebbe dunque AD la perpendicolare cercata. Se ciò non è, vi sarà nondimeno — grazie a P 27 — una rotazione intorno ad AB come asse, in virtù della quale C si rappresenta in un punto del piano σ. Allora, dette C' e D' le immagini che una rotazione sì fatta coordina ai punti C e D, la retta AD' n'uscirà perpendicolare così alla retta AB, come alla retta AC' (P 23), e p. c. anche a σ, che le contiene ambedue].

Postulato XIX.

P 29 — *Se le sfere d'un punto* D *intorno a tre punti non collineari s'incontrano ancora in un punto diverso da quello, per es. in* E, *non posson tagliarsi altrove; ossia non avranno alcun punto a comune diverso da* D *e da* E. — O, « in altri termini: « Premesso che A, B, C, D, E sono punti, ed A non coincide « con B, nè D con E; se il punto E dista da ognuno degli A, B, C quanto D, e « se qualche punto diverso da C dista da A e da B quanto C: allora ogni punto, « che disti da ognuno degli A, B, C quanto D, coinciderà con D o con E ». — Per la qual cosa, se i centri di tre sfere date non siano punti allineati, concluderemo che o non esiste alcun punto comune a tutte e tre quelle sfere, o che la loro intersezione si restringe ad un punto, o consiste in due punti diversi. — Nè sarà fuor di luogo osservare che, mentre il principio XVII (P 16) concede allo

spazio le tre dimensioni (nell'accezione ordinaria), il principio XIX che qui si postula esclude la quarta dimensione.

P 30 — *Tr.* « E, sotto la stessa Ipts., presi a piacere nel piano ABC tre punti « non collineari H, I, L, la coppia di punti comuni alle sfere D_H, D_I, D_L coinci- « derà con la coppia D, E ». [Tutte e tre queste sfere passano infatti per D e per E — grazie a $\binom{H\,,\,D}{D\,,\,M}$ P 32 § 1 — ma non hanno altri punti a comune (P 29)].

P 31 — *Df.* « Essendo A, B, C tre punti non collineari e D un punto esterno « al piano ABC, la frase: '*simmetrico del punto* D *rispetto al piano* ABC' « vien posta a significare quel punto diverso da D, che giace ad un tempo « sulle tre sfere D_A, D_B, D_C. Ved. P 27 § 1 e P 29 ». — Un tal punto — sia p. es. E — esiste per certo ed ammette una sola determinazione (ivi): esso non è subordinato ai punti A, B, C, ma sì veramente al piano ABC; poichè non cangia luogo, se al posto degli A, B, C togliamo altri punti di questo piano, come H, I, L (P 30). — « Ma se, per contrario, D appartiene al piano ABC, chiameremo *simme-* « *trico* del punto D (rispetto al piano ABC) lo stesso punto D. E in ambo i casi il « punto così definito s'indicherà brevemente con 'D/ABC' ». — Insomma, dato un piano π e un punto D qualsivoglia, il punto 'D/π', se D giaccia in π, sarà il punto D stesso; e ove D sia escluso da π, sarà quel punto diverso da D, che — a tenor delle P 27 § 1, P 29 e P 30 — è comune alle sfere di D intorno a tre punti non collineari del piano π (non importa quali); dunque comune a tutte le sfere che passan per D, avendo in π i loro centri. — Emerge di qui che se un punto E è simmetrico di un punto D (rispetto a π) questo è, alla sua volta, il simmetrico del punto E. — « La relazione o corrispondenza espressa dai termini: 'simmetrico « rispetto a π' e simboleggiata in '/π' (essendo π un piano) che intercede fra « ciascun punto ed il suo simmetrico, prende i nomi di 'simmetria rispetto « a π', e di '*specchiamento al piano* π' (o 'contro π') — che in tale ufficio « si chiama piano *di simmetria*: cosicchè 'simmetria rispetto ad un piano' « 'simmetria planare', 'specchiamento', ecc., sarà il nome generico d'ogni « corrispondenza siffatta ».

Certi eventi, già segnalati a proposito delle simmetrie rispetto ad un punto e rispetto ad un asse (P 45, 49 § 1) ricorrono qui tali e quali. Così la 'simmetria rispetto al piano π' sarà una perfetta rappresentazione dello 'spazio' su sè medesimo; una trasformazione univoca, reciproca e involutoria 'dei punti in punti' — come qualunque simmetria centrale od assiale. — Si osservi ancora che, tranne i punti del piano π di simmetria (ognun dei quali coincide con la propria immagine), nessun altro punto è tautologo in forza di /π: vale a dir che ogni punto esterno a quel piano è diverso dal suo simmetrico. Ecc. [1].

P 32 — *Tr.* « Per mezzo della simmetria rispetto ad un piano, qualsiasi sfera, « il cui centro è nel piano di simmetria, si rispecchia punto per punto in sè stessa; « e similmente ogni retta perpendicolare a quel piano è tautologa ». [La prima parte consegue immediatamente dalle cose dette (P 29, 30, 31); l'altra deriva dalle P 3,

[1] Ved. la nota IV.

5, 18: mercè le quali si prova che, sopra una retta normale al piano di simmetria, due punti simmetrici rispetto al piede equidistano sempre da ciascun punto del piano].

P 33 — *Tr.* « Da un punto dato in un piano non si potranno elevare due rette « diverse, ambedue perpendicolari a quel piano ». Eucl., lib. 11°, prp. XIII. — Ovver, che è lo stesso (P 17, 18): « A, B, C siano punti non collineari, ed E, F punti esclusi dal piano ABC: se i punti A, E, F non collineano, sarà impossibile che tanto AE quanto AF siano rette perpendicolari a ciascuna delle AB, AC ». [Se esser può, ciascuna delle due rette AE, AF sia perpendicolare a ciascuna delle AB, AC; e la sfera di B centro A tagli la congiungente A con C nei punti C e C′ (P 21). Ne viene che i punti B, C, C′, come equidistanti da A, saranno eziandio equidistanti da E — grazie a $\binom{E}{D}$ P 24 — e, per le stesse ragioni, equidistanti altresì da F. Dunque le sfere del punto C intorno ai tre punti non collineari A, E, F si taglierebber nei punti B e C′, diversi l'un l'altro e da C: la qual cosa è in opposizione col pstl. XIX (P 29). Non è dunque possibile ecc., ecc.].

P 34 — *Tr.* « Se una retta è perpendicolare in un punto a tre altre rette che « s'incontrano in esso, queste tre rette saranno in un medesimo piano ». — Eucl., lib. 11°, prp. V. — O, in altri termini: A, B, C siano punti non collineari, ed E, F punti esterni al piano ABC, non però allineati con A: se le tre rette AC, AE, AF sono tutte ad un tempo normali alla congiungente A con B, dovranno giacer tutte e tre in un medesimo piano ». [Perchè la retta AB è normale ad ambo le rette AC, AE, la perpendicolare elevata dal punto A alla AC nel piano ACE (P 11, 14) — sia p. es. AH — è in pari tempo normale ad AB (P 17). Similmente, per essere AB perpendicolare ad ambo le rette AC, AF, se tiriamo dal punto A la perpendicolare alla AC nel piano ACF — e sia p. es. AK — questa risulta eziandio perpendicolare ad AB. Dunque le rette AH ed AK, in quanto ciascuna è normale a ciascuna delle AB e AC, n'esciranno ambedue perpendicolari al piano ABC (P 17, 18); e però si confonderanno in una sola (P 33): dunque coincideranno anche i piani ACH, ACK. Ma questi non si distinguono dai piani ACE, ACF (P 33 § 1) — i quali perciò si confonderanno in un solo e medesimo piano contenente ad un tempo le rette AC, AE, AF (P 28 § 1): c. v. d.].

P 35 — *Df.* « Il piano che, a tenore di P 34, contiene tutte le rette perpen- « dicolari a una retta data in un medesimo punto di questa è, per dfnz., il ' piano « perpendicolare, o normale, alla retta in quel punto '. » — Di qui tosto — presenti le P 18, 34 — si deduce, che « Se una retta è perpendicolare ad un piano, questo a sua volta è perpendicolare alla retta: e viceversa ». E, avuto riguardo alle P 15 § 1 e P 9, 14, 16: « Data una retta e dato un punto a piacere, « sia che il punto appartenga alla retta o che ne stia fuori, ci sarà sempre un piano « che passa dal punto, ed è normale alla retta (anzi uno solo) ». — Il semigiro (P 5) converte in sè stessa ogni retta e quindi ogni piano perpendicolare all'asse. Ma dalle P 23, 34 emerge altresì che:

P 36 — *Tr.* « Qual si voglia rotazione converte in sè stesso ogni piano per- « pendicolare all'asse. E, per mezzo di semigiri o di rotazioni, da rette e piani « perpendicolari fra loro non si ricavan che rette e piani perpendicolari. »

P 37 — *Tr.* « Due piani non coincidenti, che abbiano un punto a comune, s'in- « contrano lungo una retta. » [Siano ϱ e σ i due piani, A il punto comune. In forza di P 28 vi saranno due rette r, s, l'una perpendicolare al piano ϱ e l'altra al piano σ nel medesimo punto A: e cioè la r perpendicolare a tutte le rette di ϱ che passan per A, e così la s a tutte le rette di σ che passan da A (P 18). E queste due rette r, s sono al certo distinte fra loro; perchè se coincidessero, la P 34 ci obbligherebbe a concludere, che anche i piani ϱ e σ coincidono: la qual cosa è contraria all'Ipts. Esisterà dunque una retta t perpendicolare in A al piano delle r, s (P 37 § 1, P 28). Or questa retta t, in quanto è normale ad r (P 18), sarà costretta a giacere nel piano ϱ, che è normale in A alla r (P 34, 35); e in quanto è normale ad s, giacerà similmente nel piano σ: sarà insomma comune ai due piani dati. Nè questi possono incontrarsi altrove: perchè, se avessero qualche altro punto a comune fuor di essa retta t, coinciderebbero (P 37 § 1).]

P 38 — *Tr.* « Il luogo d'ogni punto equidistante da due punti dati A e « B non coincidenti fra loro, è il piano perpendicolare alla congiungente A con B nel « punto medio fra questi ('piano *polare*' di A e B) » Cfr. P 15. — [Pongasi $C \equiv A|B$: e γ sia il piano perpendicolare in C alla AB. Si vuol provare che ciascun punto di γ equidista dai punti A e B; e che viceversa ogni punto, il quale disti egualmente da A e da B, giace in γ. Per dfnz. C equidista da A e da B (P 41 § 1). Ora, se X è un altro punto qualsiasi del piano γ, la retta CX sarà ortogonale alla AB (P 17, 35): onde basta appellarsi a P 7, per concludere che A e B equidistan da X. — Di poi, se si chiama ad es. Y un punto arbitrario fra gli equidistanti da A e da B, sol che diverso da C; la retta CX, essendo normale in C alla AB (P 5), giacerà per intero in γ (P 34, 35): ecc., ecc.]

P 39 — *Tr.* « Ne viene, che ogni qualvolta due punti siano simmetrici l'uno « all'altro rispetto ad un piano (P 31), il lor punto medio giacerà in questo « piano, che risulta perpendicolare alla lor congiungente. »

P 40 — *Tr.* « E le sfere d'un punto arbitrario intorno a più punti non com- « planari, non hanno altri punti a comune, da quello in fuori. » — Vale a dire che « Essendo A, B, C, D punti non complanari ed M un punto arbitrario, le sfere M_A, M_B, M_C, M_D non s'incontrano fuori di M » [Perchè, se avessero ancor qualche punto a comune diverso da M — e sia per es. N — i punti dati, come equidistanti da M e da N, dovrebbero star tutti e quattro in un piano (P 38). Ecc.]

P 41 — *Tr.* « Ogni qualvolta due punti equidistano da un terzo punto, eziandio « i lor simmetrici rispetto a un piano arbitrario disteranno egualmente dal sim- « metrico del terzo punto. » — In altri termini: « Per simmetria rispetto ad un piano arbitrario, l'immagine di qualsivoglia sfera è una sfera, e i due centri si corrispondon fra loro ». Cfr. P 52 § 1. [A, B, C siano punti e C disti da A quanto B: si vuol dimostrare che la sfera del punto B/μ (μ essendo un piano arbitrario) circa il punto A/μ contiene il punto C/μ. Pongasi $A' \equiv A/\mu$, $B' \equiv B/\mu$, $C' \equiv C/\mu$; indi $M \equiv A|A'$, $N \equiv B|B'$, $O \equiv C|C'$. Si può concedere che A non appartenga a μ (P 32): onde A' è diverso da A, e la retta AA' perpendicolare al piano μ nel punto M (P 39). La sfera B_A taglierà quella retta AA' in due punti (P 21), per es. in D ed E: i lor simmetrici rispetto a μ siano D' ed E'. Supporremo dapprima, che C non

appartenga ad AA', nè a μ: onde O è diverso da M e C da C', e la retta MO perpendicolare alle rette AA' e CC' nei punti M ed O (P 39, 18, 6). I punti A e A' — e nello stesso modo anche i punti C e C', D e D' — saranno dunque simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla retta MO (P 43, 49, 50 § 1, P 5); e per conseg. C' e D' equidistanti da A', grazie a P 52 § 1. Anzi una tal conclusione regge anche all'ipts., che C appartenga a μ; sebbene allora vien meno la CC'. Di poi supporremo, che C appartenga ad AA', cioè si confonda con uno dei punti D, E: onde C' si confonderà con D' o con E'. Ma i punti D' ed E' sono ancora i simmetrici dei punti D ed E rispetto al punto M (P 39); e perciò anche rispetto a qualunque retta del piano μ, che passi per M, visto che AA' $\perp$ μ: onde qui pur si deduce, che i punti C' e D' equidistan da A'. Ora, tolti B e B' al posto di C e C', si proverebbe allo stesso modo, che anche B' e D' equidistano sempre da A'. Per la qual cosa avremo ad un tempo, che C' dista da A' quanto D', e D' da A' quanto B': dunque C' da A' quanto B', in virtù del principio V (P 7 § 1).]

P 42 — *Tr.* Pertanto « Gli stessi fatti, che già segnalammo in P 53 § 1 e « P 23 a proposito di simmetria assiale, o semigiro, e di rotazione (come « altrettanti corollari del principio XV) sussistono ancora nella simmetria pla- « nare, o specchiamento ad un piano. Cosicchè, se una retta è normale « ad un piano (P 18, 35), il simile avviene delle loro immagini ».

P 43 — *Tr.* E resta provato altresì che « Ogni coppia di sfere simmetriche « (l'una dell'altra) rispetto ad un piano, sono anche simmetriche fra loro rispetto a « qualunque retta del piano, che passi dal punto medio dei centri. E, viceversa, due « sfere simmetriche intorno a una retta son sempre simmetriche rispetto al piano che « passa per l'asse, ed è normale alla congiungente i loro centri (ovvero — se le due « sfere coincidono — rispetto a qualunque piano che passi dal comun centro; giusta « le P 50 § 1 e P 32) ».

P 44 — *Tr.* « E ogni qualvolta due punti equidistano da un terzo punto, anche « i loro equinversi, o simmetrici, rispetto a un punto arbitrario diste- « ranno egualmente dall'equinverso, o simmetrico, del terzo punto. Vedi P 45 § 1. » — Vale a dire che: « Se tre punti A, B, C sono tali, che C disti da A quanto B, e siano presi anche i loro simmetrici A', B' e C' rispetto ad un punto O qualsivoglia; converrà che i due punti B' e C' equidistino dal punto A' ». Insomma « anche l'equinversione cangia le sfere in sfere e i centri nei centri ». [Si può conceder che A' è diverso da M (P 46 § 1): onde la retta MA ne taglia in due punti la sfera B_A (P 21). Questi sian per es. D ed E; e siano D' ed E' i simmetrici rispetto ad M. Se C non appartiene alla congiungente A con M, conducasi in M la perpendicolare r al piano ACM (P 28, 33); e se per contro C coincide con D o con E, tolgasi in luogo di r una retta perpendicolare a quella congiungente in M: la qual cosa è certamente possibile, giusta P 14 (e visto che l'esistenza d'un piano, il quale contenga ambo i punti A ed M, non può revocarsi in dubbio, dopo P 15 § 1). Allora i punti A, A' — e nello stesso modo anche i punti C e C', D e D' — n'esciranno l'un l'altro simmetrici rispetto ad r (P 54 § 1, P 18, 6, 5, ecc.): per la qual cosa, come C e D sono equidistanti da A, così C' e D' equidistanti da A' (P 52 § 1). Ma una conseguenza in tutto simile a questa vien fuori, purchè si tolgano i punti

B e B' al posto di C e C'; vale a dire che anche B' e D' saranno equidistanti da A': onde è forza concluder che i punti B' e C' equidistan da A' (P 7 § 1).]

P **45** — *Tr.* Quindi è che « Le medesime conseguenze di P 52 § 1 già segna- « late in P 53 § 1, P 23 e P 42 a proposito di simmetria assiale o planare « e di rotazione intorno ad un asse, valgono ancora per la simmetria « centrale, od equinversione ». Ad esempio: « Per ognuna delle tre simmetrie l'immagine di una coppia di rette perpendicolari fra loro è sempre una coppia di rette eziandio perpendicolari: e così ' piano e retta ' perpendicolari fra loro si riproducono costantemente in ' piano e retta ' perpendicolari ».

P **46** — *Tr.* Inoltre « Ogni coppia di sfere simmetriche (l'una dell'altra) ri- « spetto ad un punto sono simmetriche ancora rispetto a qualunque retta, che passi « per detto punto e sia normale alla congiungente i loro centri; e perciò anche rispetto « al piano normale a questa congiungente in quel punto (P 43) (ovvero — se le due « sfere coincidono — rispetto a qualunque retta o piano che passi dal comun centro: « vedi P 46, 50 § 1 P 32). E, viceversa, due sfere simmetriche rispetto ad un asse, « sono eziandio simmetriche rispetto al punto medio dei loro centri (il quale appar- « tiene all'asse) ».

P **47** — *Tr.* « Se due piani si tagliano, e siano tagliati da un terzo e da un « quarto piano ambedue perpendicolari alla retta comune ai due primi, la interse- « zione di questi col terzo piano sarà una coppia di rette simmetrica alla inter- « sezione col quarto. » Vedi P 37. — Ovvero: « Essendo A , B , C , D punti non complanari, e la retta AD perpendicolare al piano ABC; se nei piani ABD , ACD si conducon le rette DE , DF ambedue perpendicolari alla AD, le due coppie di rette (AB , AC) , (DF , DE) si corrispondon fra loro per simmetria rispetto ad un asse ». [Posto O ═ A|D, condurremo nei piani ABD , ACD le rette OH , OK normali alla AD (P 39 § 1, P 14); e i punti H e K li supporremo equidistanti da O, prendendo ad es. K sulla sfera di H circa il punto O (P 20). Allora, fatto M ═ H|K, la simmetria rispetto alla retta MO, perpendicolare ad ambo le rette AD , HK, permuta l'uno coll'altro i punti A e D, come pure H e K: dunque fa corrisponder tra loro i due piani ABD , ACD (che non differiscono dai piani ADH , ADK); mentre la retta DA si converte in sè stessa. Per conseguenza la retta BA — perpendicolare innalzata dal punto A alla AD nel piano ABD — si cangerà in quella retta del piano ACD, che è normale in D alla AD (P 23, 14, 11) ossia nella retta DF: e al modo stesso la AC nella DE: c. v. d.]

P **48** — *Tr.* « Due rette perpendicolari, sì l'una e sì l'altra, a un medesimo « piano, sono esse stesse in un piano, ma non s'incontrano ». [Le rette AC , DG siano due perpendicolari al piano μ innalzate dai punti A e D (non coincidenti fra loro); e nel piano ACD si produca la retta DF perpendicolare alla congiungente A con D; poi nel piano μ le rette AB e DE, l'una e l'altra perpendicolari alla stessa AD. Ora, per esser la AC perpendicolare alla AB, converrà che DF sia ortogonale a DE, grazie al Tr. precedente (e alla P 23). Onde la retta DF sarà in un tempo perpendicolare alle rette AD e DE, e perciò anche al piano μ; come la retta DG. Dunque le rette DF e DG si confondono in una (P 33); e però le AC e DG sono entrambe nel piano ACD. D'altra parte un punto comune alle rette AC e DG non può esistere, data la P 19.] — Nasce di quì, senz'altro, la prps. seguente:

P 49 — *Tr.* « Se da più punti d'una medesima retta giacente in un piano dato « s'innalzano rette perpendicolari al piano, tutte queste normali giaceranno in un « piano. E similmente le perpendicolari abbassate ad un piano dai vari punti d'una « medesima retta — la quale non giaccia sul piano, nè sia perpendicolare al piano « — sono tutte in un solo e medesimo piano; e i loro piedi si trovano tutti in « una medesima retta ».

P 50 — *Tr.* « Qualunque volta un piano contenga una retta perpendicolare ad « un altro piano, succederà che ogni retta giacente nel primo, ovver nel secondo, « di questi piani e normale alla loro comune intersezione sarà perpendicolare al se- « condo, od al primo ». [La retta r giaccia nel piano ϱ, e sia normale al piano σ nel punto A. I due piani si taglieranno per certo lungo una retta t, che passa da questo punto (P 18, 37). Siano B un punto arbitrario di t, ed u, v le perpendicolari innalzate alla retta t dal punto B nei piani ϱ e σ: si proverà che $u \perp \sigma$ e $v \perp \varrho$. Infatti la perpendicolare elevata in B al piano σ, oltre ad esser normale a t, giace nel piano Br, se B è diverso da A (P 48); oppur coincide con r, se $B = A$ (P 33): dunque essa giace in ϱ (P 37 § 1), e per conseguenza coincide con u (P 11); sicchè $u \perp \sigma$. Ma di quì nasce altresì che $u \perp v$: onde v perpendicolare a ciascuna delle t, u e per conseguenza al piano ϱ].

P 51 — *Df.* « Si dice che un piano ϱ è '*perpendicolare, ortogonale*, o *nor- « male* ad un altro piano σ lungo una retta t di questo' allorchè giac- « ciono in ϱ tutte quante le rette normali a σ nei vari punti di t. Vedi P 49. » — Dati a piacere un piano e in questo piano una retta; l'esistenza d'un piano, anzi di un solo piano perpendicolare al piano dato lungo la retta data è fuor di qui- stione, dopo le P 28, 49. — E intorno alle P 49, 50, 51 si raccolgono i fatti seguenti:

P 52 — *Tr.* « Ogni qualvolta un piano è perpendicolare ad un altro piano, « questo è, alla sua volta, perpendicolare al primo ».

P 53 — *Tr.* « E se due piani sono perpendicolari fra loro, qualunque retta tirata « in uno di essi normalmente alla comune intersezione sarà perpendicolare all'altro « piano. » — Cfr. Eucl., lib. 11°, dfnz. IV.

P 54 *Tr.* « Se una retta è normale ad un piano, tutti i piani che la conten- « gono saranno eziandio perpendicolari a quel medesimo piano. » — Eucl., lib. 11°, prp. XVIII. — « E se, viceversa, due piani saranno perpendicolari fra loro, qualunque retta normale ad uno di essi tirata da un punto arbitrario dell'altro giace tutta in quest'altro. » [Invero la detta normale coinciderà con la perpendicolare condotta nell'altro piano e dal punto stesso all'intersezione dei piani (P 53, 19, 33)].

P 55 — *Tr.* « Se di due piani che si segano, ciascuno è perpendicolare ad un « terzo piano, eziandio la comune intersezione loro sarà normale a quest'altro piano. » — Eucl., lib. 11°, prp. XIX. [Invero, se da un punto comune ai primi due piani condurremo la retta perpendicolare al terzo piano, questa dovrà giacere in ognuno di quelli (P 54)].

P 56 — *Tr.* « Di due piani perpendicolari fra loro, ciascuno è simmetrico « di sè medesimo rispetto all'altro. [Così dalle P 31, 32, 51, 54]. — Reciproca- « mente due piani diversi, uno dei quali sia rispecchiato in sè stesso dall'altro, sa- « ranno sempre ortogonali ».

§ III.

Punti interni od esterni a una sfera. Segmenti, raggi, semipiani, angoli, triangoli, ecc.

P 1 — *Tr.* « Se due sfere hanno un punto a comune, che non sia allineato coi « centri, si taglieranno secondo un cerchio, il cui piano è perpendicolare alla con- « giungente i due centri in un punto, il quale è anche centro del cerchio. Vedi « P 40 § 1. » — È quanto dire che: « Se A, B, C sono punti non collineari, le due sfere C_A e C_B s'incontrano in tutti i punti d'un cerchio, a cui fa da centro il piede della normale calata da C sulla congiungente A con B (nel piano ABC) e da sostegno il piano perpendicolare in detto punto alla stessa AB ». [Sia D quel punto di AB, per cui CD ⊥ AB (P 9 § 2); indi μ il piano perpendicolare in D alla AB, ed E un punto arbitrario del cerchio d'intersezione fra il detto piano e la sfera C_D: in primo luogo si proverà che un tal punto è sempre comune ad ambo le sfere C_A e C_B. Si può concedere, che il punto E sia diverso da C. Per certo esiste una rotazione intorno ad AB come asse (o un semigiro, se E = C/AB), mercè della quale il punto C si trasferisce sul piano ABE (P 27 § 2, ecc.). Ora l'immagine C′ del punto C, dovuta a codesta rappresentazione, dovrà stare: 1) nel piano μ — in quanto esso piano vien trasformato punto per punto in sè stesso dalla rotazione (o dal semigiro), grazie a P 23 § 2 — e perciò nella retta DE, comune ai due piani μ e ABE; come ancora 2) in ciascuna delle tre sfere C_A, C_B, C_D — però che ognuna di queste è eziandio convertita in sè stessa. Dunque il punto C′ coincide con uno dei punti comuni alla retta DE e alla sfera C_D; vale a dire con E o con E/D (P 21 § 2): ma se coincide con E/D, la simmetria rispetto ad AB lo traduce in E, senza distoglierlo dalle due sfere tautologhe C_A e C_B (P 50 § 1). Dunque è forza che il punto E appartenga a queste due sfere. — Appresso, tolgasi un punto F diverso da C e da C/AB, ma come questi comune alle sfere C_A e C_B. Un tal punto non giace sul piano ABC (P 47 § 1); ma, se si effettua una rotazione intorno la retta AB per modo, che il punto C si trasporti nel piano ABF, la nuova immagine di C sarà sempre un punto comune alle sfere tautologhe C_A e C_B, e però non diverso dall'uno o dall'altro dei punti F, F/AB. Dunque la retta FD, come immagine della CD, sarà anch'essa normale ad AB (P 23 § 2); quindi obbligata a giacere nel piano CDE (P 34, 35 § 2). D'altra parte ogni punto comune alle sfere C_A e C_B deve star nella sfera C_D (P 16 § 1): sarà dunque comune a queste figure C_D e CDE. Ecc.]

P 2 — *Tr.* « Se un medesimo cerchio è comune a più sfere, i centri di queste « saranno tutti allineati ». [Poniamo che il cerchio $C_A \cap C_B$ della prps. precedente sia contenuto eziandio dalla sfera C_H. Se il centro H di questa non si trovasse in AB, allora il piano ABH taglierebbe quel cerchio in due punti M, N, l'uno diverso dall'altro (P 47 § 1); e per cons. le sfere M_A, M_B, M_H — che non differiscon dalle C_A, C_B, C_H (P 10 § 1) — si taglierebber nei punti M, N: assurdo (P 27 § 1)].

P 3 — *Tr.* « Se una sfera ed un piano hanno un punto a comune, o non avranno « altri punti a comune da quello in fuori, o si taglieranno secondo un cerchio, il

« cui centro è sulla normale al detto piano tirata dal centro della sfera ». — Veda il Lettore.

P 4 — *Df.* « Qualunque siano i punti A e B, questo nome: 'sfera *polare*, « o *polosfera*, di A e B' — compendiato in 'Sfr (A, B)' — denota la sfera di « A o di B, circumstante al punto medio di (A, B) come centro. I quali punti « A e B si noteranno altresì come 'poli' di essa sfera, o come punti 'diametra- « mente opposti'. Ved. P 41-43 § 1. E similmente la sfera, che passa per un dato « cerchio ed ha inoltre lo stesso centro di questo (P 40 § 1) sarà la '*sfera po- « lare*', o '*polosfera*' del cerchio ». — Osservate che, posto $M = A|B$, si avrà sempre $Sfr (A, B) = Sfr (B, A) = A_M = B_M$; e che, se i punti A e B si confondono in uno, la polosfera di A e B si restringe in quest'unico punto. Ecc.

P 5 — *Df.* « Dicesi '*interno* alla sfera' il punto medio di qualsiasi coppia « di punti esistenti sopra la sfera e diversi l'uno dall'altro ». — Per la qual cosa posto che A, B siano punti, la prps.* 'X è punto interno alla sfera B_A' sarà equivalente al giudizio: « Sopra la sfera B_A esiston due punti non coincidenti fra loro, i quali ammettono X per punto medio ». — E al contrario sarà da chiamar 'punto *esterno*' ogni punto, per cui non esistano sopra la sfera due punti, neppur coincidenti, che lo ammettono qual punto medio ».

P 6 — *Tr.* « Ciascun punto che non appartenga alla sfera dev'essere in- « terno od esterno; nè potrà esser l'uno e l'altro ad un tempo: i punti che giac- « ciono sopra la sfera non sono interni, nè esterni. Il centro della sfera sarà « punto interno, se per altro la sfera non si restringa ad un punto; ecc. ecc. ». [Che p. es. niun punto interno a B_A possa giacer su B_A (qualunque siano del resto i punti A e B) emerge dalle P 43, 42, 55 § 1. E che A sia interno a B_A (quando A è diverso da B) ce lo dice P 44 § 1. Ecc.].

P 7 — *Tr.* « Purchè A, B, X siano punti e A diverso da B, dire che 'X è « interno a B_A' val quanto affermare delle due cose l'una: o che X si confonde « col centro A della sfera, o che il piano perpendicolare in X alla congiungente A « con X incontra la sfera in qualche punto diverso da X ». Perciò si equivalgono ancora i giudizi: 'X è esterno a B_A', ed "X non coincide con A, e il piano perpendicolare in X alla congiungente A con X non incontra la sfera". Ved. P 6. [Se X è diverso da A, ma sulla sfera B_A esistono punti distinti — per es. B e C — tali che $X = B|C$, converrà che le AX e BC siano rette perpendicolari fra loro (P 5, § 2) e che il piano perpendicolare in X ad AX contenga BC (P 34, 35 § 2): ecc. — Vedi anche P 3].

P 8 — *Tr.* « E secondo che X è interno, od esterno, a B_A, ciascun punto « della X_A sarà interno, od esterno, a B_A ». [Invero, preso un punto a piacere sopra la sfera X_A, purchè diverso da X — dico un punto Y — e visto che il piano polare di (X, Y) passerà sempre da A (P 38 § 2); se a questo piano si specchiano i punti B e C, le loro immagini saranno ancora in B_A e simmetriche rispetto ad Y (P 32, 41 § 2): onde Y interno a B_A, come X. Ecc.].

P 9 — *Df.* « I punti d'un piano si dicono '*interni*, od *esterni* ad un cerchio' « dato in quel piano, secondo che sono interni od esterni alla polosfera del cerchio. « Vedi P 4, 5 » — Pertanto, se un piano contenga i punti A, B, X (A diverso da

B), sarà X interno al cerchio B_A di esso piano allora soltanto, che X coincida con A, o che la perpendicolare elevata da X alla congiungente A con X (in quel piano) incontri fuori di X il cerchio (P 20 § 2 e P 3, 7).]

P 10 — *Df.* « Sempre che A , B , X siano punti, si suol dire che ' X *giace fra* « A *e* B ' qualunque volta X sia allineato con A e B, oltre che interno alla polo- « sfera di A e B. Vedi P 4, 5. E per '*segmento*' s'intenderà la figura costituita « in tutti quei punti, che giaccion fra due punti dati (*estremità* del segmento), « oppure si confondono con l'uno o l'altro di questi. Il segmento (o *intervallo*) « che ha i punti A e B per estremi, s'indicherà con '|AB|': sicchè |AB| = |BA|. « I punti che giacciono fra le due estremità si dicono *interni* al segmento ». — Per la qual cosa (avuto riguardo alle P 4, 8):

P 11 — *Tr.* « Nè A, nè B — e, se A = B, nessun punto — giace fra A e « B; ma se A è diverso da B, fra questi due giace almeno il lor punto medio. I « punti A e B spettano sempre ad |AB|; ma se A = B (vale a dire se coincidon gli « estremi) la figura abbraccia un sol punto. E se A e B sian diversi tra loro, il « segmento |AB| non è altro che il luogo di tutti que' punti della congiungente A « con B, da ciascuno dei quali innalzando una retta perpendicolare ad AB, questa « incontra la polosfera di A e B ».

Postulato XX.

P 12 — *Se tre punti* A , B , C *sono tali, che* C *giaccia fra* A *e* B, *non potrà darsi che* B *stia fra* A *e* C (*nè che* A *stia fra* B *e* C). Vale a dire (P 10): « Dati sopra una retta tre punti A , B , C l'un l'altro distinti; se il piano perpen- « dicolare alla retta in C incontra la polosfera di A e B, non potrà darsi che il « piano perpendicolare in B incontri la polosfera di A e C (nè che il piano perpen- « dicolare in A incontri la polosfera di B e C). Vedi P 35 § 2 e P 4 ». E restituita nella sua forma primitiva (che a mala pena si scorge attraverso la serie delle definizioni precedenti) la stessa prpsz. suonerebbe così: « Supposto: 1) che A , B , C , « D , E siano punti, C diverso da A e da B, e che nessun punto diverso da C disti « da A e da B quanto C; 2) che il punto $\left.\begin{matrix}D\\E\end{matrix}\right\}$ equidisti dai punti $\left.\begin{matrix}A \text{ e } B\\A \text{ e } C\end{matrix}\right\}$, ma « nessun punto diverso da $\left.\begin{matrix}D\\E\end{matrix}\right\}$ disti da ognuno dei punti $\left.\begin{matrix}A \text{ e } B\\A \text{ e } C\end{matrix}\right\}$ quanto $\left.\begin{matrix}D\\E\end{matrix}\right\}$: allora, « se esiston due punti, ognuno dei quali disti da A e da B quanto l'altro e da D « quanto A, sotto condizione che nessun punto diverso da C disti da ognuno di lor « quanto C; non possono esistere due punti, ognuno dei quali disti da B e da C « quanto l'altro e da E quanto A, sotto condizione che nessun punto diverso da E « disti da ognuno di lor quanto E ». Ma un'altro principio interviene col precedente in quasi tutte le proprietà segmentarie.

Postulato XXI.

P 13 — *Dati i punti non collineari* A , B , C ; *qualunque retta del piano* ABC, *che passi fra i punti* A *e* B, *dovrà inoltre passare fra i punti* A *e* C *o fra i punti* B *e* C: *se però non contenga nessuno degli* A , B , C. — Così anche

il Pasch nel IV Grundsatz circa la ' superficie piana ' (¹). E, sotto veste poco diversa: « Non esiste una retta, che giaccia nel piano di tre punti non collineari, e « incontri uno solo dei tre segmenti racchiusi da questi punti ». — I fatti geometrici d'ordine primitivo, che si compendiano in questo principio (trasfigurati da un lungo processo di definizione) divengon palesi nell'enunciato seguente: « Premesso: 1) che A, B, C, D, E, F sonó punti, A diverso da B, e che qualche « punto diverso da C dista da A e da B quanto C; 2) che il punto $\left.\begin{matrix}D\\E\\F\end{matrix}\right\}$ equidista « dai punti $\left.\begin{matrix}\text{A e B}\\\text{B e C}\\\text{C e A}\end{matrix}\right\}$, ma nessun punto diverso da $\left.\begin{matrix}D\\E\\F\end{matrix}\right\}$ dista da ognuno di questi « $\left.\begin{matrix}\text{A e B}\\\text{B e C}\\\text{C e A}\end{matrix}\right\}$ quanto $\left.\begin{matrix}D\\E\\F\end{matrix}\right\}$; se in ordine ad altri punti U, V, W succede: 3) che nessun « punto diverso $\left.\begin{matrix}U\\V\\W\end{matrix}\right\}$ disti da ognuno dei punti $\left.\begin{matrix}\text{A e B}\\\text{B e C}\\\text{C e A}\end{matrix}\right\}$ quanto $\left.\begin{matrix}U\\V\\W\end{matrix}\right\}$, e nessun punto « diverso da W disti da U e da V quanto W; 4) ch'esistan due punti non coinci- « denti, ognuno dei quali disti da A e da B quanto l'altro, e da D quanto A, con « l'obbligo, che nessun punto diverso da U disti da ognuno di lor quanto U; allora « questa condizione 4) o si verifica ancorchè si tolgano i punti B, C, E, V in luogo « degli A, B, D, U; o si avvera togliendo per essi ordinatamente C, A, F, W ».

P 14 — *Tr.* « Se A, B, C sono punti collineari, non esiste alcun punto, il quale « appartenga ad un solo dei tre segmenti |AB|, |BC|, |CA|. » [Si ommette l'ipotesi, che due di que' punti coincidano. — Ora, dato che i punti A, B, C siano al tutto diversi fra loro, proveremo che, se un punto D è interno ad |AB|, ma esterno ad |AC|, dovrà essere interno a |BC|. Tolgasi fuor della retta AB un punto E a piacere; e sulla retta BE un punto F, esterno al segmento |BE| — quindi anche alla retta BA — per es. il simmetrico di E rispetto a B (che non appartiene a |BE|, dal momento che B ε |EF|: vedi P 45 § 1; P 10, 11, 12). La retta DF, passando fra i punti A e B, senza passar fra B ed E, dovrà contener qualche punto interno ad |AE| (P 13). E, perchè passa fra i punti A ed E, ma non fra C ed A, passerà fra C ed E (P 13). Dunque la stessa DF, in quanto passa fra i punti C ed E, ma non fra B ed E, dovrà passar fra B e C (P 13): che è quanto affermare D ε |BC|; nessun altro punto essendo comune alle rette AB, DF].

P 15 — *Tr.* « E, sotto la stessa Ipts., bisognerà che C spetti ad |AB|, o che « B spetti ad |AC|, o che A spetti a |BC|. » — Ossia: « Di tre punti collineari, uno « almeno starà nel segmento racchiuso dagli altri due ». [Anche qui supporremo, che i punti A, B, C siano tutti diversi; e mostreremo che dall'ipts. ' C non appartiene ad |AB|, nè B ad |AC| ', si deduce che ' A è in |BC| '. Siano D un punto fuor della retta AB (P 15 § 1, ecc.), poscia E un punto che giace fra i punti B e D, quale ad es. il punto B|D (P 11): onde B esterno al segmento |DE|, grazie ad $\begin{pmatrix}D, E\\A, C\end{pmatrix}$ P 12. Dunque

(¹) *Vorles. üb. neuere Geom.*, Leipzig, 1882 (pag. 21).

la retta CE, passando fra i punti B e D, ma non fra B ed A, passerà fra D ed A (P 13); tagliando ad es. in F il segmento |AD|. E, perchè i punti A , D , E non collimano ed F giace fra A e D, mentre B non è fra D ed E, la retta BF dovrà passar fra i due punti A ed E (P 13); tagliando in G per es. il segmento |AE|. Di poi, visto che G sta fra A ed E, laddove B non è posto fra A e C, bisognerà che F stia fra C ed E (P 13). Onde non resta più che invocare la stessa P 13 in ordine ai punti E , B , G e alla retta DA, per concluder che A sta fra B e C: c. v. d.]

P 16 — *Tr.* « Se A , B , C sono punti non collineari, nessuna retta del piano « ABC può passare ad un tempo fra B e C, fra C ed A, e fra A e B ». — Ossia: « tre punti A′ , B′ , C′, interni rispettivamente a |BC| , |CA| , |AB|, non sono mai « allineati ». Cfr. P 13. — [Se A′ potesse giacer fra B′ e C′, la retta BC dovrebbe passare fra i punti A e B′, o fra i punti A e C′ (P 13); e per conseguenza C giacere fra A e B′, ovvero B fra A e C′ (P 19 § 1, ecc.): contro P 12. Al modo stesso si prova, che il punto B′ non giacerà fra i due punti A′ e C′, nè C′ fra A′ e B′. Dunque — grazie a P 15 — i punti A′ , B′ e C′ non saranno per certo collineari. — Pasch, loc. cit., pag. 25].

P 17 — *Tr.* « Dall'ipts. che ' A , B , C , D siano punti, C appartenga ad |AB| « e D appartenga ad |AC| ' nasce sempre, che C appartiene a |BD| ». [Basterà dimostrare che ogni qualvolta C giace fra A e B, e D fra A e C, bisognerà che C stia fra B e D: perchè, se due o più di quei punti coincidono, il Tr. consegue ipso facto dalla dfuz. del segmento (P 10). — Sia dunque E un punto arbitrario, purchè esterno alla retta dei quattro punti, ed F un punto obbligato soltanto a giacer fra D ed E: sicchè — per via di $\begin{pmatrix} D, E, F \\ A, B, C \end{pmatrix}$ P 12 — fra i punti D ed F non cade alcun punto della congiungente E con C. Or se questa — che non contiene F, nè alcuno dei punti A , B , D — tagliasse per avventura il segmento |FA|, dovrebbe tagliare anche |AD|, grazie a $\begin{pmatrix} F, D \\ B, C \end{pmatrix}$ P 13; per la qual cosa C cadrebbe fra i punti A e D; contro l'ipts. fatta, che D appartenga ad |AC| (P 12). Ma, se la retta CE non passa fra i punti A ed F, dovrà senza fallo incontrare |FB|, grazie a $\begin{pmatrix} F \\ C \end{pmatrix}$ P 13, e visto che C per ipts. giace fra A e B. Passerà dunque fra i punti F e B; e, non avendo alcun punto a comune con |FD|, le converrà di passare fra i punti B e D, in virtù di $\begin{pmatrix} E, D \\ A, C \end{pmatrix}$ P 13: ecc.] — Di qui nasce senz'altro — avuto riguardo a P 12 — che:

P 18 — *Tr.* « Se un punto C giace fra i punti A e B, e un punto D fra gli A « e C, non può D giacer fra B e C; o, in altri termini: se C giace fra A e B, i « segmenti |AC| e |CB| non avranno alcun punto a comune, da C in fuori [1] — Per

[1] Nella mia Memoria citata in Prefazione stavano in luogo del patl. XX le due P 14 e P 18, che son relazioni fra quattro punti, laddove P 12 è una relazione fra tre. La semplificazione che or s'introduce proviene dai '*Grundlagen der Geometrie*' di D. Hilbert (2ª ediz. § 3; Leipzig, 1903): dove il fatto che « Di tre punti collineari, uno ed uno solo giace fra gli altri due » è tolto a principio fondamentale di 'Anordnung', insieme col noto assioma del Pasch

« la qual cosa: Non esiste alcun punto interno comune a tutti e tre gli inter- « valli, che hanno gli estremi in tre punti dati a piacere ». [Uno invero dei punti dati (se questi son tutti diversi e collinean fra loro) giace fra gli altri due (P 15). Se no, basta appellarsi a P 10, 11].

P 19 — *Tr.* « Se tre punti A, B, C sono tali, che C stia nel segmento |AB|, « tutto il segmento |AC| — e al modo stesso anche l'altro |BC| — sarà contenuto « in |AB|; e ciascun punto interno ad |AC| o a |BC| sarà interno ad |AB| ». — Insomma: « Ciascun punto di un qualsivoglia segmento determina coi punti estremi due nuovi segmenti, che son contenuti nel primo ». [Se A = B, non occorron parole. — Poniamo che A e B non coincidano. Allora ogni punto di |AC|, diverso da A e da C, sarà interno all'uno o all'altro dei due segmenti |AB|, |BC| (P 14). Ma non può essere interno a |BC| (P 18): dunque è interno ad |AB|.]

P 20 — *Tr.* « E, nella stessa Ipts., |AB| si compone di tutti i punti, che spet- « tano indistintamente ad |AC| o a |BC|, e di questi soli ». — Cioè: « Qualsivoglia segmento è la somma logica dei due segmenti intercetti fra un suo punto arbitrario e le due estremità ». [Invero qualunque punto di |AB| dovrà stare in uno almeno dei due segmenti |AC| e |BC| (P 14). Il resto è già detto in P 19].

P 21 — *Tr.* « Qualsivoglia segmento contiene tutto il segmento racchiuso da « due de' suoi punti ». — E cioè dall'ipts. 'A, B, C, D sono punti, e C, D ε |AB|', si deduce che |CD| ɔ |AB|. [Per certo D appartiene ad |AC|, o a |BC| (P 20): dunque |CD| sarà contenuto da |AC| o da |BC|, e per conseg. da |AB| (P 19)].

P 22 — *Tr.* « Se i punti A, B, C non collineano, e siano presi i punti A' e B' « rispettivamente in |BC| e |CA|, dovrà esistere un punto comune ai segmenti |AA'| « e |BB'| ». [Suppongo A' diverso da B e da C, come pure B' diverso da C e da A. Il principio XXI — ove si enunci nei punti B, C, B' e per la retta AA' — ne assicura, che questa retta incontrerà |BB'| in un punto, da poi che A non può stare fra B' e C a motivo di P 12. E per le stesse ragioni la retta BB' dovrà tagliare il segmento |AA'| in un punto. Ma questi due punti d'intersezione coincidono; poichè ciascuno è comune alle rette AA' e BB', che non si confondon tra loro — visto che all'una appartiene il punto B, escluso dall'altra]. — Nel modo stesso si proverebbe il teor.:

P 23 — *Tr.* « Ed ogni retta, la quale unisca B con qualche punto dell'inter- « vallo |AA'|, incontra sempre |CA| ».

P 24 — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C e un quarto punto D, altro « che A o B; se avvien che la retta DA passi fra B e C, e la retta DB fra C ed « A, bisognerà che la retta DC passi fra A e B ». [Per certo i punti C e D non coincidono, poichè la retta DA non contiene C. Ora le AD e BD taglieranno ad es. nei punti A' e B' i segmenti |BC| e |CA|: per la qual cosa D sarà interno al

---

(ch'è per noi la P 13) e con vari altri petiti. I quali tutti venner poi riprodotti nella '*Rational Geometry*' di G. B. HALSTED (New-York, 1904). Ma osservate che delle due parti in cui si può scindere il detto principio (vedi le nostre P 12 e P 15) una è conseguenza dell'altra e del citato assioma di M. PASCH.

segmento |AA'| (P 22); laddove C non può stare fra A' e B (P 12). Di quì la tesi, in virtù di $\binom{A', B}{B, C}$ P 13].

P 25 — *Tr.* « Purchè A, B siano punti, le sfere di B centro A e di A centro « B s' incontrano ». — Questa è insomma la prova, ch' esiste un triangolo equilatero avente un dato segmento |AB| come lato. Eucl., lib. 1°, prp. I. [Si può conceder che i punti A e B non coincidano (P 9 § 1). Posto M ≡ A|B, A' ≡ A/B, siamo certi che M appartiene ad |AB| e B ad |AA'| (P 10, 11), e per conseg. M ad |AA'| (P 19); anzi M interno a questo segmento. Dunque il piano perpendicolare in M alla retta AB taglierà in qualche punto diverso da M la polosfera di A e A' (P 10), cioè la sfera A_B; e se indichiamo con X un tal punto, la retta MX è normale ad AB (P 35 § 2). Pertanto la simmetria rispetto alla retta MX rappresenta A con B e B con A (P 5, 6 § 2), permutando la sfera A_B con la sfera B_A (P 52 § 1): dunque X, in quanto appartiene ad A_B e di più corrisponde a sè stesso (P 49 § 1), dovrà essere un punto comune ad ambedue quelle sfere.]

P 26 — *Tr.* « Se A, B, C sono punti non collineari e le rette AB, AC per- « pendicolari fra loro, si deduce che A sarà interno alla sfera C_B, e C esterno « alla sfera A_B. Vedi P 5 ». [Già si sa che la sfera C_B e la congiungente A con B si taglieranno in due punti — sian per es. D, E — diversi l' un l' altro e da C (P 21 § 2, ecc.). Circa la seconda parte del Tr., posto F ≡ A/B ed M ≡ C|D, basterà dimostrare, che uno dei punti D ed E giace fuor del segmento |FA|: visto che D si baratta con C per mezzo del semigiro intorno alla retta BM, il quale converte in sè stessa la sfera A_B (P 50 § 1, P 3 § 2, ecc.). Ora il punto F, al pari di A, sarà interno alla sfera D_B — poichè si scambia con A per effetto d' equinversione rispetto a B, ferma stante D_B — e però l' uno e l' altro staranno fra i punti D ed E (P 10): ond' è uopo che il punto F cada fra A ed E o fra A e D (P 20). Ma nell' un caso E, nell' altro D, sarà esterno ad |AF| (P 12)]. — E di quì tosto, richiamando le P 8, 10 § 2:

P 27 — *Tr.* « Se una retta e una sfera *si toccano* — cioè s' incontrano, una « sola volta — tutti i punti di quella saranno esterni alla sfera, tranne uno « solo (il punto di contatto) ».

P 28 — *Tr.* « E se A, B, C sono punti, ed A interno alla sfera C_B, converrà « che C sia esterno alla sfera A_B ». [Se A è diverso da B, sulla sfera C_B vi sarà qualche punto D, per cui la retta DA sia normale ad AB (P 6, 7): un tal punto sarà esterno ad A_B (P 26) e con esso anche il punto C (P 8)].

P 29 — *Df.* « Se A, B sono punti non coincidenti, l' '*ombra di* B *da* A' « — o '*prolungamento* di |AB| oltre B' — denotan la classe dei punti, per « ognuno dei quali — sia per es. X — il punto B appartiene al segmento |AX|. — « La '*semiretta* A *per* B' — o '*raggio* A *verso* B' — sarà invece la classe dei « punti che stanno in |AB|, o nel prolungamento di |AB| oltre B. Il punto A è « l' '*origine*' di questa figura: la quale — come retta terminata in A — s' indicherà « con '|AB' ». — Osservate che il punto B e il simmetrico di A rispetto a B spettano sempre all' ombra di B da A; come i punti A e B/A all' ombra di A da B (P 10, 11, ecc.): e che la simmetria non distrugge la qualità di ' segmento ' e

di ' raggio '; vale a dire che un raggio |AB o un segmento |AB| dati a piacere son covarianti di A e B nei rispetti del semigiro, dell' equinversione e dello specchiamento ad un piano. Vedi P 52, 53 § 1, P 42, 44 § 2; ecc.

P 30 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipotesi, non esiste alcun punto comune ai due « prolungamenti di |AB|; nè alcun punto, che giaccia ad un tempo in |AB| e nel « prolungamento oltre B, se si eccettua B: ma il segmento |AB| co' suoi prolunga- « menti ' ombra di A da B ' e ' ombra di B da A ' riproducono tutta la retta ». [L' ultima cosa è apertamente significata in P 15 — presente la P 29. — Che nasca contradizione al supporre " X appartiene all' ombra di A da B e all' ombra di B da A " — vale a dire (P 29) " A ε |BX| insieme con B ε |AX| " — emerge dalle P 11, 12. — E che un punto Z di |AB| coincida con B, qualunque volta B ε |AZ|, è altresì detto in P 12; se si considera, che per ipts. non si può avere B ε |AZ| con Z ≡ A, e che le due condizioni Z ε |AB| B ε |AZ| si escluderanno a vicenda, se Z è diverso da B (P 12).]

P 31 — *Tr.* « Ed |AB| sarà il luogo dei punti, che sono comuni ai due raggi « |AB e |BA ».

P 32 *Tr.* « E le ombre di B da A e di A da B sono raggi: anzi, posto C ≡ A/B, « l' ombra di B da A non differisce dal raggio |BC ». [I punti B e C sono comuni alle due figure (P 29); e, per qualunque altro punto X, la condizione B ε |AX| insieme con la B ε |AC| ne escludono che B possa star fra C ed X, visto la $\binom{C\,,\,X}{B\,,\,C}$ P 18: onde X appartiene a |BC|, o C a |BX| (P 15); vale a dire X ε |BC (P 29), qualunque volta è nell' ombra di B da A. — Viceversa da ognuna delle condizioni ' X ε |BC| ', ' C ε |BX| ' si deduce che B non può star fra C ed X (P 15): onde B ε |AX| — posto che B ε |AC| per ipts. e data la $\binom{X}{B}$ P 15 — sempre che X appartenga a |BC.]

P 33 — *Tr.* « E, se C, D sono punti arbitrari del raggio A verso B, converrà « che D appartenga ad |AC|, o C ad |AD|; ma, quando siano diversi da A, questo « punto non appartiene a |CD| ». L' Ipts. è che gli A, B, C, D soddisfacciano le relazioni: " C ε |AB|, ovvero B ε |AC| " e " D ε |AB|, ovvero B ε |AD| " (P 29); la qual cosa equivale a supporre: " C ε |AB| con D ε |AB|, ovvero C ε |AB| con B ε |AD|, ovvero B ε |AC|, con D ε |AB|, ovvero B ε |AC| con B ε |AD| ". — Se uno dei punti C, D si confonde con A o con B, la Ts. è vera senz'altro (P 11, 29, ecc.): si può dunque concedere che sian diversi da A e da B. Allora dal primo membro C, D ε |AB| dell' Ipts. nasce che A non appartiene a |BC|, nè a |BD| (P 12, ecc.), dunque nemmeno a |CD| (P 14): per la qual cosa, in virtù di P 15, bisognerà che D appartenga ad |AC|, o C ad |AD|, che è la Ts. Dal secondo membro ' C ε |AB| e B ε |AD| ' si deduce, a tenor di $\binom{D\,,\,B}{B\,,\,C}$ P 19, che C appartiene ad |AD|. Nel modo stesso vediamo, che il terzo membro dell' Ipts. coinvolge la relazione D ε |AC|. Infine dall'ultima parte ' B ε |AC| con B ε |AD| ' nasce tosto, come della prima, che A non può stare in |BC|, nè in |BD| (P 12), quindi nemmeno in |CD| (P 14): ecc., ecc.].

P 34 — *Tr.* « Inoltre coincideranno i due raggi |AB e |AC, qualunque volta C « sia un punto di |AB, purchè diverso da A ». [La dmstz. suddetta prova senz'altro, che in quest' Ipts. ciascun punto D, il quale appartenga ad |AB, giace ancora in |AC. Ma la stessa Ipts. ' C ε |AB| ovvero B ε |AC| ' non si altera, perchè si scambino fra loro i punti B e C: dunque ogni punto di |AC dovrà appartenere ad |AB.]

P 35 — *Tr.* « E il segmento |CD|, che ha per estremi due punti arbitrari del « raggio |AB, giacerà tutto in questo ». [Trascurando il supporre, che C o D si confonda con A, si avrà per dimostrato, che |AB = |AC = |AD (P 34); e d'altra parte |CD| sarà contenuto in |AC| o in |AD|, secondo che D ε |AC| o che C ε |AD| (P 19, 33)].

P 36 — *Tr.* « Qualunque retta è divisa da un suo punto arbitrario in due « raggi, simmetrici l'uno dell'altro rispetto a quel punto, che ne è l'origine. « Questi raggi non hanno altri punti a comune (dall'origine in fuori); ma, presi in- « sieme, riproducon la retta ». [Chi ben guardi, il Tr. è già stabilito in P 30, 32, 34: ma si può confermare esplicitamente così. Dicasi A il punto dato; e tolgasi un punto B a piacere sopra la retta data, purchè diverso da A (P 26 § 1), indi il punto B' = B/A (P 44, 45 § 1): le due semirette in questione son sempre |AB e |AB'. Anzitutto l'ombra di A da B si confonde col raggio |AB' (P 32), mentre il raggio |AB consiste in |AB| e nell'ombra di B da A (P 29): per la qual cosa i due raggi assomman la retta, senz'aver punti a comune da A in fuori (P 30). Appresso se il punto B cangia luogo, passando ad es. in C, i nuovi raggi |AC, |AC' non differiscon dai primi, tutt'al più commutati fra loro (P 34), dacchè il nuovo punto C cadrà necessariamente in |AB o in |AB'. Infine se si considera, che la simmetria rispetto ad A (per via di P 45 § 1 e P 29) trasforma l'uno nell'altro i segmenti |AB| e |AB'| e fa corrispondere la condizione B' ε |AX'| alla B ε |AX| — dove X denoti un punto arbitrario di AB, e sia fatto X' = X/A — concluderemo che i raggi |AB e |AB' sono l'un l'altro simmetrici rispetto ad A]. — Ne viene, ad es., che qualunque sfera descritta intorno ad A come centro taglierà sempre in un punto ciascuno dei raggi complementari |AB e |AB' (P 21 § 2); ossia:

P 37 — *Tr.* « Un raggio dato a piacere taglia in un punto qualunque sfera, « che abbia per centro l'origine; ma non esistono sopra un medesimo raggio due « punti diversi e ad egual distanza dall'origine ».

P 38 — *Df.* « E (nell' Ipts. di P 34) acquistan valore preciso le locuzioni: i « punti C e D son situati ' dalla stessa *banda di* A ', — oppure ' da *bande* « opposte di A '; mercè le quali (dato che nè C, nè D si confonda con A) si « esprime che i punti C e D son tutti e due in uno solo di que' due raggi com- « plementari |AB e |AB' — oppur che l'un punto giace in un raggio e l'altro nel- « l'altro. Ved. P 36 ». — Uno di questi fatti deve sempre aver luogo, ma tutti due in una volta non si offriranno giammai. — Insomma le semirette, in cui resta divisa la retta mercè d'un suo punto A, si chiamano ancora ' le due *bande* di A sopra la retta '.

P 39 — *Df.* « Data una retta *r* e un punto esterno P, l' '*ombra* di *r* da P ' « non è altro che il luogo di tutti que' punti X per cui si verifica, che |PX| incontri « *r*. — Il '*semipiano r per* P ' o '*da r verso* P ', simboleggiato in ' |*r* P ', è

« la classe dei punti, ognuno dei quali — sia p. es. Y — giace sul piano Pr in ma-
« niera che la retta r non incontri il segmento |PY|, o lo incontri tutt'al più in Y ».
— L'una e l'altra figura contengono la propria origine r, e son covarianti di
r e P rispetto alla simmetria. Ecc.

P **40** — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., e detto P′ il simmetrico del punto P ri-
« spetto alla retta r, l' ' ombra di r da P ' si confonde col semipiano ' da r verso
« P′ ' ». Cfr. P 32. [Per certo r passa fra P e P′ (P 54 § 1 e P 11). Ora, se un punto
X appartiene all'ombra di r da P, ma non alla retta r — sicchè questa ne incontri
il segmento |PX| fuor degli estremi (P 39), passando cioè fra P ed X — non potrà
darsi che r passi fra P′ ed X: vietandolo P 18 o P 16, secondo che X appartiene o
non appartiene alla retta che unisce P con P′: onde X sarà un punto del semipiano
|rP′ (P 39). — Viceversa, da Y ε |rP′ $\sim r$ (cioè dal supporre che r non incontri il
segmento |P′Y|, tutto che Y giaccia nel piano P′r, ma non sulla r) si deduce
che r taglia il segmento |PY| — in virtù di P 14 o P 13, secondo che Y giace o
non giace su PP′ — onde risulta che questo punto appartiene anche all'ombra di r da P].

P **41** — « Inoltre coincidono i due semipiani |rP, |rQ, qualunque volta Q sia
« un punto del semipiano |rP, ma non appartenga ad r ». Cfr. P 34. [Si dimostra
come il precedente in virtù degli stessi principi — e cioè da P 13, 14, 16, 18, 39].

P **42** — *Tr.* « E nessun punto esterno alla retta r è comune ai due semipiani
« |rP, |rP′: ma ciascun punto del piano Pr deve stare nell'uno o nell'altro. Cfr.
« P 30 ». [Preso un punto a piacere nel semipiano |rP, ma non sulla retta r — e
sia p. es. X — dal fatto che r passa fra P e P′, senza passar fra P ed X (P 54 § 1,
P 10, 11, 39), si deduce che r passa eziandio fra P′ ed X (P 13, 14); e p. cons.
che X non è un punto del semipiano |rP′ (P 39). — Di poi, se indichiamo con Y
un punto arbitrario del piano Pr, e supponiamo che Y non appartenga al semi-
piano da r verso P, quindi nemmeno ad r, bisognerà che la retta r tagli il
segmento |PY| in un punto interno (P 39, 10). Non può dunque la r, che passa fra
P e P′, incontrare il segmento |P′Y| (P 16, 18): onde Y giace nel semipiano |rP′].

P **43** — *Tr.* « E, dato che il punto Q appartenga al semipiano |rP, tutto il
« segmento |PQ| giacerà in |rP. Anzi ogni raggio, che abbia origine in r e passi da
« un punto del semipiano |rP, sarà contenuto in questo (purchè l'origine e il punto
« non sian tutt'uno). Cfr. P 35 ». [Così dalle P 19, 33, 35, 39, 41].

P **44** — *Tr.* « Se in un piano è tracciata una retta a piacere, il piano sarà
« diviso da questa in due semipiani, che non hanno alcun punto a comune fuor
« della retta, ma presi insieme, riproducono il piano. E questi due semipiani si scam-
« bieranno fra loro (ribaltandosi l'uno sull'altro) per mezzo del semigiro intorno
« alla retta ». — Sicchè, detti π ed r il piano e la retta, il prodotto logico dei
due semipiani sarà uguale ad r, la somma logica a π. Cfr. P 36. [Il Tr. deriva
principalmente da P 27, 47, 49 § 1 e P 39-42].

P **45** — *Df.* « Sotto la stessa Ipts., due punti del piano π, esclusi i punti di r,
« si dicon giacere ' dalla stessa *banda* di r ', o ' da *bande* opposte di r ',
« secondo che stanno insieme, o non stanno, in un solo dei due semipiani, che
« la retta determina sul piano dato: vale a dire secondo che r non taglia, o taglia
« il segmento che unisce i due punti. Ved. P 36, 44 ».

P 46 — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C, qualunque piano che passi « fra i punti A e B (vale a dire ogni piano, che incontri il segmento |AB|, ma non « contenga A nè B) passa eziandio fra B e C, ovver passerà fra C ed A, o passerà « per C; non però fra B e C e fra C ed A in una volta ». — Cfr. P 13, 16. [Qualunque piano, che seghi la retta AB, taglia lungo una retta il piano ABC (P 37, § 2): e perciò si ritorna senz'altro alle P 13, 16].

Procedon di qui le nozioni di 'semispazio' e delle due '*bande* d'un piano': le quali oramai, sulle tracce di P 39-45, si posson dire acquisite. Come un piano per mezzo d'una sua retta, e una retta da un punto che le appartenga (P 36, 44), così anche lo spazio, o classe dei punti, è diviso da un piano dato a piacere in due ben distinte figure, cui il piano stesso è confine. Queste sono — se il piano abbia nome π, ed A, A' denotino due punti esterni e simmetrici rispetto ad esso (P 16, 29, 31, § 2) — il 'semispazio π *per* A', o '*da* π *verso* A', e il 'semispazio π per A'', o 'da π verso A'': che, se ci piace, potremo anche distinguer coi nomi di '*ombra di* π *da* A'' e 'ombra di π da A'. La prima di queste figure (ad es.) non è altro che il luogo dei punti X, per cui succede che |AX| non incontra π, o lo incontra in X: ovvero succede, che |A'X| sempre incontri π (il che torna lo stesso). Cfr. P. 29, 39.

P 47 — *Df.* « Ogni qualvolta A, B, C sono punti non collineari, per '*angolo* « *convesso* dei raggi |AB e |AC' s'intenderà la figura costituita in A e in tutti « que' punti diversi da A, per ognuno dei quali — sia p. es. X — la semiretta « A per X incontra il segmento |BC|: la qual figura verrà eziandio designata con « '$\hat{A}$.BC'. Invece l''*angolo concavo* dei raggi |AB e |AC' — significato da « '$\check{A}$.BC' — sarà il luogo di A e di tutti que' punti diversi da A, ognuno dei quali « — sia p. es. Y — giace ancora nel piano ABC, ma per modo che il raggio « |AY non incontra il segmento |BC|, fuor che tutt'al più negli estremi. — '*Vertice* dell'angolo' il punto A, '*lati* dell'angolo' le due semirette, o raggi, « |AB, |AC; '*interni* all'angolo' tutti i punti dell'angolo, che sono esclusi dai lati. « '*Retto*' ogni angolo piano convesso, i cui lati sian raggi perpendicolari fra « loro ». — È manifesto senz'altro, che gli angoli $\hat{A}$.BC e $\hat{A}$.CB si confondon tra loro (P 10), e così gli $\check{A}$.BC e $\check{A}$.CB; e che, se un punto D sarà interno, tutto il raggio |AD sarà contenuto dall'angolo. Ecc.

P 48 — *Tr.* « Se A, B, C sono punti non collineari, e D, E punti dati a pia- « cere sui lati |AB, |AC, purchè diversi da A, l'angolo $\hat{A}$.DE coinciderà con l'an- « golo $\hat{A}$.BC: e similmente $\check{A}$.DE = $\check{A}$.BC. E, dato inoltre un punto F, interno ad « $\hat{A}$.BC, l'angolo A.BF sarà contenuto dall'angolo A.BC: anzi ogni punto di A.BC « dovrà stare in uno degli angoli $\hat{A}$.BF od A.CF ». [Superfluo il dire, che i punti A, D, E non collineano (P 19, 21 § 1, ecc.). Una retta che passi per A e incontri |BC|, ovvero incontri |DE|, taglierà necessariamente |BE| (P 13, ecc); atteso che A sarà esterno così a |CE|, che a |BD| (P 33): e, per le stesse ragioni, dovrà tagliar nell'un caso |DE|, nell'altro |BC|. Ma la stessa P 13, invocata per le due terne di punti (B, F, H) ed (E, F, K) — dove H, F, K denotano i punti d'incontro di quella retta coi tre segmenti |BC|, |BE|, |DE| — ci dice ancora che i punti H e K staranno ambedue sopra il raggio |AF. E invero la retta CA, non passando fra i punti B

— sia per es. D — tutto che scelto ad arbitrio, avrà per immagine un punto D' comune alle sfere D_A, D_B, D_C: per la qual cosa D' coinciderà con D, ovver col simmetrico di questo punto rispetto al piano ABC (P 29-31 § 2). Ma nel primo caso ogni punto coinciderà con la propria immagine (P 40 § 2) — perchè le sfere intorno al punto D saranno anch'esse tautologhe — e nell'altro caso ogni punto esterno a quel piano è diverso dal punto omologo. Ecc.]. — E n'esce altresì dimostrato il seguente:

P 24 — *Tr.* « Una similitudine, la quale consenta più punti tautologi non « complanari, si confonde con l'identità ».

P 25 — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C, qualsivoglia rotazione $\mathfrak{R}$ « intorno alla retta BC si può sempre aver componendo lo specchiamento al piano « ABC con lo specchiamento al piano polare dei punti A ed $\mathfrak{R}$A. Ved. P 38 § 2 e « P 4, 5, 8 ». [Si può conceder che AB sia perpendicolare a BC. — Or se $\mathfrak{R}$ fosse precisamente il semigiro intorno alla retta BC (P 7), basterebbe appellarsi a P 6. Poniamo dunque che la rotazione onde si parla sia diversa dal semigiro; e subordini ai punti (distinti) A_1 ed A i punti A ed A': di guisa che $\mathfrak{R}A_1 = A$ e $\mathfrak{R}A = A'$. I punti A e A' giacciono insieme sulle due sfere tautologhe A_B e A_C (P 23 § 2), e il lor punto medio — che chiameremo D — non appartiene all'asse (P 10): onde la retta AA' è normale ad ambo le rette DB e DC (P 3, 5 § 2) e i punti A e A' sono l'un l'altro simmetrici rispetto al piano BCD. Osservate che — posto $D_1 = A_1|A$ — sarà D_1 fuor di BC come D; e i punti D_1 e D saranno omologhi secondo $\mathfrak{R}$ (P 23 § 2) e p. c. diversi fra loro (P 8): onde A_1 è diverso da A'; e i punti A_1, A ed A', in quanto appartengono tutti alla sfera A_{1D}, non collineano (P 55 § 1). Inoltre la retta BC, supposta normale a BA, è altresì perpendicolare a ciascuna delle BA_1, BA' (P 23 § 2). D'altra parte $\mathfrak{R}$ subordina la polosfera dei punti A, A' a quella dei punti A_1, A: queste due sfere sono dunque simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un piano, che passa per l'asse BC (P 11); e p. c. simmetrici l'uno dell'altro, rispetto al medesimo piano, anche i centri D_1 e D, come pure i due cerchi A_{1D_1} e A_D, che il piano A_1AA', perpendicolare in B a BC (P 34, 35 § 2) determina su quelle sfere. Detti cerchi si taglieranno in due punti distinti A ed E, poi che A non spetta a DD_1 (P 47 § 1); e il piano polare di questi punti A ed E conterrà D_1 e D (P 38 § 2), ma non la retta BC, visto che i punti B, C, D e D_1 non sono complanari (P 10). Dunque è forza che ognuno dei punti A ed E sia convertito in sè stesso dalla simmetria che scambia fra loro i due cerchi: onde ABC sarà il piano di simmetria; e p. c. anche i punti A_1 ed A' n'esciranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto al piano ABC. Di qui si deduce, indicando con $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{M}$ gli specchiamenti nei piani BCA, BCD: $\mathfrak{R}A = A' = \mathfrak{M}\mathfrak{L}A$, $\mathfrak{R}A_1 = A = \mathfrak{M}\mathfrak{L}A_1$, $\mathfrak{R}B = B = \mathfrak{M}\mathfrak{L}B$, $\mathfrak{R}C = C = \mathfrak{M}\mathfrak{L}C$. Pertanto la similitudine $\overset{-1}{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ converte in sè stesso ciascuno dei punti non complanari A, A_1, B, C; dunque (P 24) $\overset{-1}{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}\mathfrak{L} = 1$, e p. c. $\mathfrak{M}\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$: c. v. d.]. — Con questo ragionamento abbiamo altresì dimostrato che:

P 26 — *Tr.* « Sotto le stesse Ipts., la rotazione $\mathfrak{R}$ risulta ancora dallo spec- « chiamento al piano BCD, seguito dallo specchiamento al piano A'BC; ovvero dallo

o '*periferia*', del triangolo. '*Interno*' al triangolo qualunque punto di essa figura, il quale non stia sul contorno; '*esterno*' al triangolo qualunque punto del piano ABC, che sia escluso dalla figura. Angoli (interni) del triangolo saranno i tre angoli convessi $\hat{A}.BC, \hat{B}.CA, \hat{C}.AB$. Ecc.

P 52 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., il triangolo |ABC| non è altro che l'in« tersezione di due qualunque degli angoli $\hat{A}.BC, \hat{B}.CA, \hat{C}.AB$, e di tutti e « tre i semipiani AB per C, BC per A, CA per B. Vedi P 2 § 1. » — Vale a dire: $|ABC| = \hat{A}.BC \cap \hat{B}.CA = \hat{B}.CA \cap \hat{C}.AB = \hat{C}.AB \cap \hat{A}.BC = A.BC \cap \cap \hat{B}.CA \cap \hat{C}.AB = |AB.C \cap |BC.A \cap |CA.B$. [Così da P 51, in virtù delle P 22, 23, 29, 39, 47, 49, ecc.] Ma dalle P 49, 52 e 43 emerge altresì la seguente:

P 53 — *Tr.* « Il segmento che ha per estremi due punti presi a piacere (sì « l'uno che l'altro) in un dato angolo convesso, o in un dato triangolo giace tutto « nell'angolo, ovver nel triangolo. » — In altri termini sono figure '*convesse*' il triangolo e l'angolo piano convesso — come il semipiano, il raggio e il segmento (P 43, 35, 21).

P 54 — *Tr.* « Se due segmenti coincidono, avranno i medesimi estremi; e se « due raggi coincidono, avranno la stessa origine. » [Sian per es. A e B, C e D gli estremi dei due segmenti eguali; e ci sia consentito il supporre A diverso da B, e per conseg. anche C diverso da D. Il punto B, dovendo star con A in |CD| (P 2 § 1 e P 11), cadrà senza fallo in |CA|, o in |AD| (P 20): per la qual cosa uno almeno dei punti C e D non giacerà fra A e B (P 12, 11). Ma i punti C e D alla lor volta son contenuti da |AB| per Ipts.: quindi, ove C non cada fra i punti A e B, sarà giuocoforza ch'esso coincida con A o con B (P 10, 11): e il simile dicasi in ordine al punto D. Si conclude che uno almeno dei punti C, D coinciderà con uno degli A e B. Il resto al Lettore. — Di poi, se due raggi |AB e |A'B coincidesser fra loro, senz'aver la medesima origine — essendo B un loro punto comune diverso dalle origini A e A' — il punto A' dovrebbe giacere in |AB e il punto A in |A'B: sicchè n'escirebber verificate ad un tempo le due condizioni "$A' \varepsilon |AB|$ ovvero $B \varepsilon |AA'|$" e "$A \varepsilon |A'B|$ ovvero $B \varepsilon |A'A|$" (P 29), il cui prodotto (finchè i punti A, A', B son distinti) equivale a '$B \varepsilon |AA'|$' (P 12). Senonchè in questa ipts., nessun punto X diverso dagli A, A', B e soggetto alla condizione $A \varepsilon |BX|$ giacerebbe in |AB|, nè B potrebbe stare in |AX| (P 12): vale a dire un tal punto (qual'è ad es. B/A) sarebbe escluso dal raggio |AB, quantunque appartenga ad |A'B, dal momento che $B \varepsilon |A'X|$ in virtù di $\binom{A', X}{B, C}$ P 14.] — Per questa via si conferma altresì che

P 55 — *Tr.* « Due angoli (convessi o concavi), ovver due triangoli non « posson coincidere, fin tanto che i lati dell'uno sian diversi da quelli dell'altro ».

§ IV.

Teoremi sulle rotazioni. I postulati d'Euclide e d'Archimede. Similitudine ed isomeria. Congruenza dei segmenti e degli angoli.

P 1 — *Df.* « *Similitudine* è il nome generico d'ogni trasformazione univoca e reciproca dei punti in punti, che a qualsivoglia coppia di punti equidistanti da un terzo punto coordina sempre una coppia di punti, eziandio equidistanti dal trasformato del terzo ». — O, sotto altra veste: « *Similitudine* vuol dire: rappresentazione dello spazio su sè medesimo, che alle sfere descritte intorno a un punto arbitrario (qual centro) fa corrisponder le sfere descritte intorno all'immagine di questo punto. E due figure si dicono *simili*, qualunque volta esista una similitudine, che muti l'una nell'altra punto per punto: cioè quando sian forme omologhe d'una qualche similitudine ».

È palese l'analogia che intercede fra codesta dfnz. e quella di *collineazione*, dovuta al v. Staudt [1]. Mentre 'collineazione' significa trasformazione, che non ha virtù di distruggere l'*allineamento* fra punti (cioè converte ogni terna di punti allineati in una terna di punti allineati); 'similitudine' è invece la trasformazione, che non ha poter di sopprimere l'*equidistanza* fra punti (insomma che muta qualunque terna isoscele in un'altra terna isoscele).

P 2 — *Tr.* « Le simmetrie rispetto ad un punto, a una retta, ad un piano (equinversione, semigiro, specchiamento) sono similitudini: ved. P 52 § 1 e P 41, 44 § 2. La risultante o prodotto di due similitudini è di nuovo una similitudine. Qualsivoglia rotazione è una similitudine: ved. P 22, 23 § 2. La trasformazione inversa d'una similitudine è ancora una similitudine. L'identità è una similitudine ».

P 3 — *Tr.* « Qualsivoglia similitudine rappresenta i punti collineari in punti collineari, anzi converte ogni retta in una retta ed ogni piano in un piano. Al punto medio coordina sempre il punto medio e al simmetrico il simmetrico; a rette e piani perpendicolari fra loro altre rette e piani eziandio perpendicolari fra loro; a ciascun segmento un segmento, a ciascun raggio un raggio, a ciascun triangolo un triangolo: ecc. ». [Si dimostra tal quale P 53 § 1 — presenti le dfnz. di retta, piano, segmento, raggio, ecc.]

P 4 — *Tr.* « La risultante o prodotto delle simmetrie rispetto a due piani che si tagliano è una rotazione intorno alla retta comune a quei piani ». [Siano α e β i due piani, r la retta d'intersezione, u e v le due tracce d'un piano perpendicolare ad r sopra i due piani α e β (P 35, 37 § 2); e, preso un punto P ad arbitrio, pongasi $P_1 = P/\alpha$, $P' = P_1/\beta$: onde P' sarà l'immagine di P attraverso

[1] Loc. cit., pag.

la similitudine $/\beta./\alpha$, prodotto dagli specchiamenti $/\alpha$ e $/\beta$ (P 31 § 2 e P 2). Si dimostra, che anche la rotazione $/v./u$ (P 22 § 2) intorno alla retta r (normale ad ambo le rette u, v) traduce P in P'. Invero questa rotazione — al pari di $/\alpha$, di $/\beta$ e di $/\beta./\alpha$ — converte in sè stesso ogni punto di r e ogni piano perpendicolare ad r (P 23, 36, 54, 56 § 2): in particolare anche il piano che passa per P, ed è normale ad r. D'altra parte le due perpendicolari innalzate a questo piano dai punti P e P_1 sono rette simmetriche (l'una dell'altra) non solo rispetto ad α (P 45 § 2, ecc.), ma sì ancora rispetto ad u; in quanto le loro tracce Q e Q_1 sul piano delle u e v siano punti simmetrici rispetto ad α, e perciò anche simmetrici rispetto ad u (P 39, 18, 7 § 2). Nel modo stesso si corrispondon fra loro secondo $/v$ le due perpendicolari P_1Q_1 e P'Q' innalzate al piano π dai punti P_1 e P'. Sono dunque omologhe, tanto per $/\beta./\alpha$ quanto per $/v./u$, le rette PQ e P'Q': dunque omologhi ancora i due punti P e P']. — Con questo (pur che s'intendano date ad arbitrio le rette u, v, anzi che i piani α e β) abbiamo altresì dimostrato che:

P 5 — *Tr.* « Una rotazione, tutto che data ad arbitrio, è sempre uguale al « prodotto degli specchiamenti a due piani, che si tagliano secondo l'asse di quella ». — Inoltre:

P 6 — *Tr.* « Componendo, nell'ordine che più ci piace, le simmetrie rispetto « a due piani perpendicolari fra loro, si ottiene per risultante il s e m i g i r o intorno « alla retta d'intersezione ». [Invero — dato alle lettere il medesimo significato che hanno in P 4, ma supposti α e β perpendicolari fra loro (P 51 § 2) — le due rette normali al piano β che passan da P e P_1, una delle quali è la $P'P_1$, si scambieranno fra loro, sia per effetto della trasformazione $/\beta./\alpha$ (o della $/\alpha./\beta$), come ancora in virtù del semigiro intorno ad r: atteso che i loro piedi son punti l'un l'altro simmetrici rispetto ad α (P 42 § 2) e perciò anche simmetrici rispetto ad r, e il piano β è simmetrico di sè medesimo (P 50 § 1, ecc.). Per egual modo le rette normali al piano α che passan da P_1 e P', una delle quali è la PP_1, si corrispondon fra loro secondo $/\beta./\alpha$ (o $/\alpha./\beta$) ed $/r$: onde i punti P e P' si scambieranno fra loro in virtù di $/\beta./\alpha$ (o di $/\alpha./\beta$), e n'esciranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad r]. — Di qui nasce, avuto riguardo a P 28 § 2 e P 4, che:

P 7 — *Tr.* « Il prodotto dei semigiri intorno a due rette perpendicolari fra loro « non differisce dal semigiro intorno alla retta perpendicolare ad entrambe nel loro « punto comune. Per la qual cosa la s i m m e t r i a r i s p e t t o a d u n a s s e è una « r o t a z i o n e. Ved. P 22 § 2 ».

P 8 — *Tr.* « Non può darsi che una rotazione converta in sè stesso un punto « escluso dall'asse ». [Poniamo che la rotazione $/v./u$ — dove le u, v siano rette perpendicolari a qualche altra retta r in un medesimo punto e diverse fra loro, ma del resto arbitrarie — ammetta un punto tautologo E non giacente sull'asse. Allora, detti α e β i due piani che l'asse r determina con quelle rette u e v, si deduce che la rotazione $/v./u$ equivale al prodotto $/\beta./\alpha$ (P 5): per la qual cosa i due punti E ed E/α saranno anche simmetrici l'uno dell'altro rispetto a β, visto che $\}/\beta./\alpha\{E = E$. Ma il punto E non può star su ciascuno dei piani α e β, diversi fra loro in Ipts. (P 18 § 2); onde i punti E ed E/α non potranno coincidere (P 31 § 2). Dunque una medesima retta (la congiungente i due punti) sarebbe normale ad ambo i piani α e β (P 39 § 1): assurdo (P 35, 9 § 2)].

P 9 — *Tr.* « Se A, B, C, D sono punti non complanari, esiste sempre una « rotazione intorno alla retta AB, mercè della quale il semipiano |AB . C si rappre- « senta col semipiano |AB . D. Ved. P 2, 3 ». [Basta quì richiamare la dimostrazione di P 27 § 2, con l'avvertenza di scegliere per punto E quel punto, dove la sfera C_A taglia il raggio |AD (P 37 § 3)].

P 10 — *Tr.* « Acciò che una rotazione equivalga ad un semigiro, basterà che « converta in sè medesimo un piano passante per l'asse. Ved. P 7 ». [Sia 𝔑 una rotazione intorno alla retta r: e poniamo che un certo piano π passante per r si rappresenti in sè stesso. Da un punto A, preso ad arbitrio fuor di quel piano, conducasi il piano α perpendicolare ad r; e dicasi A' il punto 𝔑A, che deve giacere in α — poichè questo piano è tautologo secondo 𝔑 (P 36 § 2). Oltre la retta r sono tautologhe ancora la retta s, traccia di π in α, e quindi la retta t normale ad ambedue le r, s nel loro punto comune (traccia di r su α) che chiameremo M. Ora, designando per H e H' i piedi delle normali abbassate alla retta s dai punti A ed A' — onde H' = 𝔑H (P 36, 54 § 2) — bisognerà che la sfera H_M contenga H', in quanto i suoi punti si corrispondon fra loro (P 23 § 2): per la qual cosa M = H|H', e le rette AH, A'H' n'esciranno simmetriche l'una dell'altra rispetto al punto M. Nel modo stesso le rette AK e A'K' — perpendicolari a t nei punti K e K' — saranno simmetriche rispetto ad M. Dunque simmetrici rispetto ad M, e per conseguenza rispetto ad r (P 7 § 2), anche i punti A e A'. Ecc.].

P 11 — *Tr.* « Due sfere omologhe secondo una rotazione arbitraria sono sempre « simmetriche fra loro, e l'asse di rotazione è nel piano di simmetria ». [Se una delle due sfere abbia il centro sull'asse di rotazione, la Ts. è vera senz'altro, in virtù di P 23, 32 § 2 e P 46, 50 § 1. — Se ciò non è, sian per es. B e B' i centri delle due sfere (che si corrispondon secondo una rotazione 𝔑 intorno alla retta r) M il lor punto medio, ed A un punto dell'asse, diverso per altro da M: la prima delle due sfere taglia il raggio |BA in un punto, che chiameremo C (P 37 § 3). La sfera di B, centro A, come tautologa in 𝔑, passa altresì per B': d'onde la retta MA risulta perpendicolare alla retta BB', e il punto B' simmetrico del punto B rispetto ad AM (P 3, 5 § 2). Inoltre il punto 𝔑C convien che appartenga a C_A, perchè anche questa è sfera tautologa in 𝔑; e una ragione consimile — detto $\mathcal{S}$ per brevità il semigiro intorno ad AM — vuole che il punto $\mathcal{S}$C appartenga a C_A. Ora queste similitudini 𝔑 e $\mathcal{S}$ converton, sì l'una che l'altra, il raggio |BA nel raggio |B'A (P 3): dunque i punti 𝔑C e $\mathcal{S}$C giaceranno ambedue sulla sfera C_A e sul raggio |B'A; e però si confonderanno in un solo e medesimo punto C' (P 37 § 3). Ne viene che $\mathcal{S}$, al par di 𝔑, rappresenta la sfera C_B sulla sfera $C'_{B'}$: ecc. Quanto al resto, ved. P 43 § 2].

Postulato XXII.

P 12 — *Per tre punti non collineari passa almeno una sfera.* — Vale a dire « Se, dati i punti A, B, C e supposto A diverso da B, vi sarà qualche punto « diverso da C, che disti da A e da B quanto C; dovrà esistere ancor qualche punto, « da cui disti ciascuno degli A e B quanto C ». E, considerando che il piede della

normale abbassata dal centro di quella sfera sul piano dei tre punti dati equidista da ognuno di essi (P 3 § 3); « Tre punti, che non sian per diritto fra loro, giacciono « sempre in un cerchio. Ved. P 40 § 1 ». — È questo il noto principio, che W. Bolyai ([1]) proponeva alle veci del pstl. d'Euclide sulle parallele.

P 13 — *Tr.* « Ogni qualvolta due sfere sono simmetriche ad una medesima « sfera, saranno anche simmetriche fra loro ». [Una medesima sfera γ, specchiandosi ai piani μ e ν, produca le sfere α e β come immagini (P 41 § 2): si vuol provare che anche queste α, β saranno simmetriche l'una dell'altra. Grazie alle P 43, 46 § 2 le altre ipts. (di simmetria centrale od assiale) rivengono a quella che or si considera. Supporremo in primo luogo, che i centri A, B, C delle sfere non siano punti allineati. Allora, grazie al principio XXII (P 12) esisterà sul piano ABC qualche punto, che dista egualmente da ognuno degli A, B, C: e un tal punto deve giacere su tutti e due i piani μ e ν, perpendicolari alle coppie (A, C) e (B, C) nei loro punti medî (P 38, 39 § 2). Nè potrà darsi che questi due piani coincidano, fintanto che i punti A, B, C non collineano: dunque si taglieranno lungo una retta r (P 37 § 2); e le simmetrie rispetto a μ e ν, per via delle quali si passa da α a γ e da γ a β, daranno come prodotto una rotazione intorno alla retta r (P 4), che traduce direttamente α in β. Pertanto queste due sfere α, β saranno simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un asse normale alla coppia (A, B) nel suo punto medio (P 11) — e perciò anche rispetto a questo punto medio e rispetto al piano che in esso è normale alla congiungente A con B (P 43, 46 § 2). — Di poi si suppongano collineari, ma al tutto distinti fra loro, i tre punti A, B, C; e tolgasi una quarta sfera δ, che sia simmetrica a γ come α e β, ma non abbia il centro in AB. Ora, essendo le sfere α e δ simmetriche d'una medesima sfera γ e i centri A, D, C non collineari, bisognerà che α e δ siano simmetriche fra loro, per ciò che abbiam dimostrato. Nel modo stesso anche β e δ: e però le α e β sono simmetriche d'una medesima sfera, il cui centro non appartiene ad AB: ecc., ecc. ([2])].

P 14 — *Tr.* « Pur che A, B, C siano punti e C giaccia fra A e B, il punto « A/C deve star fra i due punti A ed A/B ». — O, in altri termini, concessa l'ordinaria dfnz. della *somma* di due segmenti, com'è stabilita più tardi (§ 5): « Se un segmento è minore di un altro, anche il doppio del primo è minore del doppio dell'altro ». [Posto $A' \equiv A/B$, $C' \equiv C/B$, $M \equiv C|A'$, e visto che i punti A, B, C son distinti; che C appartiene ad $|AB|$ e B ad $|AA'|$, onde $B, C \,\varepsilon\, |AA'|$ mentre $B \sim\varepsilon\, |AC|$ (P 11, 19, 12 § 3); si deduce che $B \,\varepsilon\, |CA'|$ (P 20 § 3) e $|BA'| \supset |CA'|$. Dunque il punto C/B, in quanto appartiene a $|BA'|$ (per simmetria rispetto a B: ved. P 2, 3) giacerà nel segmento $|CA'|$. Or se $D \equiv C'/M$, la polosfera dei punti C e D — ch'è simmetrica (rispetto ad M) alla polosfera di A' e C' — sarà dunque simmetrica alla polosfera di A e C (P 13): per la qual cosa, ove D non coincida

([1]) '*Kurzer Grundriss eines Versuches...*', 1851, pag. 46.

([2]) È ben noto che questo teorema può reggersi ancora senza dipendere dal pstl. d'Euclide: ma quì si è preferito dedurlo dal XXII, anzichè da qualche altro principio; dopo aver senza frutto cercato di stabilirlo su i soli principî I-XXI. Or chi togliesse questa P 13 come primitiva, non avrebbe mai da ricorrere al pstl. XXII per tutto ciò che contemplano i primi cinque §§, e potrebbe così ritardarne l'introduzione sino al § 6°.

con A, convien che C coincida col punto A|D (atteso che allora C sarà il solo punto comune a quelle due sfere simmetriche, e per conseguenza autosimmetrico). Ma il punto D, obbligato come C' a giacer nel segmento |CA'| (ch'è rispecchiato in sè stesso dall'equinversione /M) non può coincider con A, esterno al detto segmento (P 12 § 3) in quanto si sa che C è fra i punti A e A'. Dunque D = A/C; dunque il punto A/C sta nel segmento |CA'|, e per cons. in |AA'|: visto che |CA'| ↄ |AA'|, dal momento che C ε |AA'|]. — La prps. che segue ha ufficio di Lemma rispetto a P 21.

P 15 — *Tr.* « Se due segmenti giacciono l'uno nell'altro senza coincidere, non « saranno simmetrici fra loro ». [I punti C e D, l'un l'altro distinti, giacciono insieme dentro il segmento |AB|, ed uno almeno — per esempio C — è diverso dai punti estremi A e B: si dimostra, che nè le coppie (A, B) e (C, D), nè le (A, B) e (D, C), saranno simmetriche fra loro. Invero, perchè fosser simmetriche, dovrebber coincidere i punti medî di (A, C) e (B, D), ovvero i punti medî di (A, D) e (B, C), secondo che ad A corrisponde C, o D. In primo luogo suppongasi D = A (e C ~ = B). Allora l'ipts. A|C = B|D verrà esclusa senz'altro dall'unicità del simmetrico di A rispetto ad A|C (P 44 § 1); e l'altra ipts. A|D = B|C dall'essere A punto esterno a |BC| (P 12 § 3). Così ancor si ragiona, se D = B. — Poscia ognuno dei punti C e D sia diverso da A e B. Si può conceder che D si trovi in |AC|, poi che giace necessariamente in |AC| o in |BC| (P 20 § 3). Allora l'ipts. A|C = = B|D viene esclusa da ciò, che il simmetrico del punto D rispetto ad A|C dovrebbe anch'esso giacere in |AC|, laddove B non vi giace (P 12 § 3). E l'altra ipts. A|D = = B|C si rimuove osservando, che i due segmenti |AD| e |BC| non avranno punti in comune; poi che non ne hanno i segmenti |AC| e |BC|, tranne il punto C, esterno ad |AD| (P 18, 19, 12 § 3)].

P 16 — *Tr.* « Ogni qual volta A e A_1 sono punti non coincidenti; e si pone, « qualunque sia l'**indice** *i* (pur che maggiore di 1):

$$A_i = A_{i-2}/A_{i-1}, \; A_0 = A ;$$

« allora ogni punto di questa classe è diverso da tutti gli altri, e giace nel raggio « $|AA_1$; anzi i punti $A_0, A_1, A_2, \ldots A_i$ spetteranno al segmento $|AA_i|$: inoltre i « segmenti $|A_0A_1|$ e $|A_{i-1}A_i|$ sono sempre simmetrici fra loro ». [Considerando che il Tr. è vero circa i primi tre punti A_0, A_1, A_2 (P 44, 45 § 1; P 10, 11, 29 § 3; P 2, 5), basterà dimostrar, che se è vero in ordine ai punti $A_0, A_1, \ldots A_i$, deve sussistere ancora nei punti $A_0, A_1, \ldots A_i, A_{i+1}$. Or dalla ipts. $A_{i-1} \, \varepsilon \, |AA_i| \sim \iota A \sim \iota A_i$ segue tosto, in virtù di P 12 § 3, che $A_i \sim \varepsilon |AA_{i-1}|$: per la qual cosa — visto che il punto A_i spetterà in ogni modo al segmento $|A_{i-1}A_{i+1}|$ (P 11 § 3) — se ne deduce attraverso $\begin{pmatrix} A_0, & A_{i-1}, & A_{i+1} \\ A, & B, & C \end{pmatrix}$ P 14, che $A_i \, \varepsilon \, |AA_{i+1}|$. Dunque $|AA_i|$ ↄ $|AA_{i+1}|$ (P 19 § 3) ed $A_{i+1} \sim$ $= A$, anzi $A_{i+1} \sim \varepsilon |AA_i|$ (P 11, 12 § 3); atteso che il punto A_i è diverso così dall'estremo A_0 (per il supposto induttivo) come dall'estremo A_{i+1} (P 45, 8 § 1). Ne viene che i punti $A_0, A_1, \ldots A_i, A_{i+1}$ giacciono tutti in $|AA_{i+1}|$ e son tutti diversi fra loro: da poi che gli $A_0, A_1, \ldots A_i$ già stanno in $|AA_i|$ e son tutti diversi fra loro in ipts. Ma il fatto che $A_1 \, \varepsilon \, |AA_{i+1}|$ si può interpretare dicendo che A_{i+1} è nell'**ombra** di

A_1 da A (P 29 § 3), dunque nel raggio $|AA_1$ (ivi). Infine la polosfera dei punti A_{l-1}, A_l (P 4 § 3) sarà simmetrica tanto alla polosfera dei punti A_0, A_1 (in virtù del supposto induttivo e delle P 1-3), quanto alla sfera polare dei punti A_l, A_{l+1}: dunque (P 13) simmetriche ancora le polosfere di (A_0, A_1) e di (A_l, A_{l+1}), l'una all'altra; e per cons. simmetrici l'uno dell'altro i segmenti $|A_0A_1|$ e $|A_lA_{l+1}|$ (P 11 § 3)].

P. **17** — *Tr.* « E se inoltre facciamo $\alpha_1 = A_2$, $\alpha_2 \equiv A/\alpha_1$, ... e in generale « $\alpha_i \equiv A/\alpha_{i-1}$ (qualunque sia l'indice i, pur che maggiore di 1) si dimostra che « $\alpha_i = A_{2^i}$ ». [Anche qui basterà dimostrar che il Tr., supposto vero per $i = 1, 2, \ldots l$, sussiste ancora per $i = l + 1$. Invero, la simmetria rispetto al punto α_l, scambiando fra loro i punti A_0 e α_{l+1}, coordina al punto $A_0|\alpha_l$, ossia α_{l-1}, il punto $\alpha_l|\alpha_{l+1}$. Ma, come i punti A_0 e A_{2^l} sono l'un l'altro simmetrici rispetto al punto $A_{2^{l-1}}$ — in quanto $A_{2^{l-1}}$ e A_{2^l} non differiscon da α_{l-1} e α_l, grazie all'ipts. fatta — così anche i punti $A_{2^{l-1}}$ e $A_{3 \cdot 2^{l-1}}$ risp.° al punto A_{2^l}: atteso che, se si tolgono i punti $A_{2^{l-1}}$ e $A_{2^{l-1}+1}$ in luogo dei punti A_0 e A_1, gli $A_{2^{l-1}}$, $A_{2^{l-1}+1}$, ... A_{2^l}, A_{2^l+1}, ... $A_{3 \cdot 2^{l-1}}$ prendono ordinatamente le veci dei punti A_0, A_1, ... $A_{2^{l-1}}$, $A_{2^{l-1}+1}$, ... A_{2^l}: e nel modo stesso anche i punti A_{2^l} e $A_{2^{l+1}}$ rispetto al punto $A_{3 \cdot 2^{l-1}}$; in virtù della sostituzione $\begin{pmatrix} A_0, A_1 \\ A_{2^l}, A_{2^l+1} \end{pmatrix}$, per cui gli A_{2^l}, $A_{3 \cdot 2^{l-1}}$, $A_{2^{l+1}}$ diventano A_0, $A_{2^{l-1}}$, A_{2^l}. Dunque il simmetrico di α_{l-1} rispetto a α_l non è altro che il punto $A_{3 \cdot 2^{l-1}}$, sicchè $\alpha_l|\alpha_{l+1} = A_{3 \cdot 2^{l-1}}$; e al tempo stesso $\alpha_l/A_{3 \cdot 2^{l-1}} \equiv A_{2^{l+1}}$. Dunque $\alpha_{l+1} = A_{2^{l+1}}$: c. v. d.].

Se non piace il nome di '*scala* dei punti A_0 e A_1' (della quale A_i sarebbe l' 'i^{esimo} *gradino*') per la serie dei punti A_0, A_1, A_2, A_3, ...; questi si posson chiamare, occorrendo, i punti '*ultrasimmetrici* di A_0 rispetto ad A_1' (a cominciar dal simmetrico A_2) di guisa che il punto A_i sarebbe l' '$(i$-1)-mo ultrasimmetrico di A_0 rispetto ad A_1'); come non disconvien l'attributo d' '*ipersimmetrici*' ai punti α_2, α_3 ... testè definiti. Ma se questi nomi si eviteranno qui senza sforzo, altro è dei seguenti, che hanno ufficio non trascurabile in molte dimostraz.[1]

P **18** — *Df.* « Premesso che A e B sono punti; se facciamo una volta per « sempre: $\delta_0 \equiv B$, $\delta_1 \equiv A|B$, $\delta_2 \equiv A|\delta_1$, $\delta_3 \equiv A|\delta_2$, ..., e in generale, qualunque « sia il numero intero e positivo i:

$$\delta_i \equiv A|\delta_{i-1},$$

« δ_i si dirà l' 'i-esimo punto ipermedio di A, B verso A'. Di poi, se « si pone una volta per sempre: $\delta_{i,0} \equiv A$, $\delta_{i,1} \equiv \delta_i$, $\delta_{i,2} \equiv \delta_{i,0}/\delta_{i,1}$, $\delta_{i,3} \equiv$ « $\equiv \delta_{i,1}/\delta_{i,2}$, ... e in generale, qualunque sia il numero intero l, pur che mag- « giore di 1:

$$\delta_{i,l} \equiv \delta_{i,l-2}/\delta_{i,l-1},$$

« tutti i punti di questa classe son per chiamarsi '*medio-simmetrici* della « coppia (A, B)' ». — Insomma il punto $\delta_{i,l}$ qui definito verrebbe ad esser l' "$(l$-1)-simo degli ultrasimmetrici di A rispetto all'i-simo punto ipermedio di A, B verso A": se non che, per $l = 1$, il punto $\delta_{i,l}$ non è altro che l'ipermedio δ_i. — Osservate che tutti i punti ipermedi di (A, B) spetteranno al

segmento $|AB|$ e tutti i medio-simmetrici al raggio $|AB$ (P 11, 19, 29 § 3; P 16 e Induct.); e come, in virtù di P 3 e Induct.: « Qualsivoglia similitudine, che rappresenti in sè stesso ciascuno dei punti A e B, dovrà convertire in sè stesso ogni singolo punto $\delta_{i,j}$; e così tutti i punti medio-simmetrici della coppia (A, B) n'esciranno tautologi ».

Postulato XXIII.

P 19 — *Siano* A_0 *e* A_1 *punti non coincidenti,* P *un punto arbitrario del raggio* $|A_0A_1$: *se, qualunque sia l'indice i, pur che maggiore di* 1, *si chiami sempre* A_i *l'equinverso del punto* A_{i-2} *rispetto al punto* A_{i-1}; *allora, per qualche valore n dell'indice i, bisognerà che il segmento* $|A_{n-1}A_n|$ *contenga il punto* P. — Questo il notissimo principio, che va sotto il nome di postulato d'Archimede (Assioma V, *de sphaera et cylindro*). Ved. P 16.

P 20 — *Tr.* « Se un punto A_1 giace fra i punti A e B, vi sarà sempre un « punto ipermedio di A, B verso A, che cade fra i punti A e A_1. Ved. P 18 ». [Dal momento che, posto $A_0 \equiv A$, il punto B — ossia δ_0 — per un certo valore n dell'indice i appartiene al segmento $|A_{n-1}A_n|$ (P 19), esisterà senza fallo una coppia di punti A_{i-1} e A_i che nell'intervallo $|A_{i-1}A_i|$ racchiuderà qualche punto ipermedio di A, B verso A: per es. il punto δ_h. Ora si scelga un numero intero k in maniera che $i < 2^k$: onde i punti A_{i-1} e A_i sono interni al segmento $|A A_{2^k}|$ (P 16), ch'è quanto dire interni ad $|A\alpha_k|$ (P 17). Ne viene — grazie a P 14 e avuto riguardo a P 12 § 3 — che il punto δ_{h+1} giacerà fra i due punti A e α_{k-1}, e così il punto δ_{h+2} fra gli A e α_{k-2}, ... il punto δ_{h+k-1} fra A e α_1, e infine il punto δ_{h+k} fra A ed A_1].

P 21 — *Tr.* « Dato che A e B siano punti diversi l'uno dall'altro; fra due « punti arbitrarî, purchè distinti, del raggio A verso B, deve sempre giacer qualche « punto medio simmetrico della coppia (A, B). [Ved. P 18 ». Siano P e Q quei due punti. Si può conceder, che P giaccia in $|AQ|$, ma senza coincider con A (P 33 § 3); poi che l'ipts. $P \equiv A$ si è già contemplata in P 20. Tolgasi un punto C a piacere fra i punti P e Q; e si chiami D quel punto di $|AC|$, per cui la coppia (A, D) è simmetrica della (C, P): vale a dir l'equiverso di P rispetto ad $A|C$ (P 44, 45 § 1). Fra i punti A e D cadrà in ogni modo anche un punto ipermedio di A, B verso A (P 20): tal sia p. es. A_1. Allor se si pone $A_0 \equiv A$, $A_2 \equiv A_0/A_1$, ... e in generale $A_i \equiv A_{i-2}/A_{i-1}$; nella serie dei punti $A_0, A_1, \ldots A_i, \ldots$ ce ne saranno due consecutivi — per es. A_{n-1} e A_n — che racchiudono il punto P, in maniera che $P \varepsilon |A_{n-1}A_n|$ (P 19). E si può anche conceder che P sia diverso dal secondo estremo A_n: perchè, se non fosse, nulla c'impedirebbe di togliere i punti A_n e A_{n+1} in luogo dei punti A_{n-1} e A_n, senza modificare in nessun altro modo i ragionamenti che seguono. Or, se $A_n \equiv C$, la Ts. è vera senz'altro, poi che A_n è un punto medio-simmetrico della coppia (A, B) (P 18): supponiamo pertanto $A_n \sim\equiv C$. Proveremo che il punto A_n deve cader fra C e P: il Tr. sarà così stabilito, poi che $|CP| \supset |PQ|$ (P 19 § 3). E a tal uopo (in virtù di P 15 § 3) basterà dimostrar che P non può giacer fra A_n e C, nè C fra A_n e P.

1) Il punto P, se è possibile, cada fra A_n e C. Per ipts. P è diverso da A e da C (P 11 § 3), ma giace fra questi due punti in virtù di $\begin{pmatrix} Q, A, P, C \\ A, B, C, D \end{pmatrix}$ P 17 § 3. Dunque il punto A_n giacerebbe ad un tempo nel raggio |AB (P 18) — che non differisce da |AP (P 34 § 3) — e nell'ombra di P da C, vale a dire nel raggio |PA (P 29, 32, 34 § 3): dunque starebbe in |AP| (P 31 § 3), senza coincider con A o con P. D'altra parte, se consideriamo che il punto A_{n-1} appartiene al segmento $|AA_n|$ (P 16) e il punto P al segmento $|A_{n-1} A_n|$, è forza concluder che P (diverso da A e da A_n) giace fra i punti A e A_n (P 19 § 3). Pertanto l'ipts. 1) involge contradizione a P 12 § 3.

2) Il punto C, se è possibile, giaccia fra A_n e P. Dunque ancor nel segmento $|A_{n-1} A_n|$ (P 19 § 3): per la qual cosa ognuno dei punti C e P giacerebbe in $|A_{n-1} A_n|$ senza coincider col punto A_n. Ma questo intervallo è simmetrico di $|AA_1|$ (P 16) al par di |CP|; e però son simmetrici l'uno dell'altro i segmenti $|A_{n-1} A_n|$ e |CP| (P 10 § 3, P 13). Dunque l'ipts. 2) risulta in opposizione a P 15. Ecc.]

P 22 — *Tr.* « Qual si voglia similitudine che ammetta due punti tautologi, l'uno diverso dall'altro, dovrà tener fermo eziandio ciascun punto che spetti « alla lor congiungente ». [Se esser può, supponiamo che nella retta AB coesistan due punti P e P′ non coincidenti fra loro, ma corrispondenti in virtù d'una similitudine δ per cui $\delta A = A$, $\delta B = B$, $\delta P = P'$. Per certo il punto P è nel raggio |AB, ovvero nel raggio |BA (P 29, 30 § 3). Sia p. es. in |AB: onde anche il punto P′ è tenuto a giacere in |AB, perchè questo raggio sarà convertito in sè stesso da δ (P 3); ma l'un punto e l'altro sarà diverso da A. Dunque delle due cose l'una: o P giace fra A e P′, o P′ fra A e P (P 33, 11 § 3). Ne viene che un punto, il quale stia fra P e P′, giacerà in uno solo dei due segmenti |AP| e |AP′| (P 18 § 3), che si corrispondon fra loro; e per cons. non potrà esser tautologo in δ. D'altra parte fra i punti P e P′ cadon sempre dei punti medio-simmetrici della coppia (A, B) (P 21), i quali son tutti tautologi rispetto a δ (P 18): dunque l'ipts. $P \sim= P'$ genera contradizione].

Non può sfuggire al L. l'analogia col *teorema fondamentale* della Geometria Proiettiva, o teorema di Staudt. E invero, di fronte alla ' Geom.ª delle similitudini ', questa P 22 compie il medesimo ufficio, che il teorema fondamentale di Staudt ha verso la ' Geom.ª delle collineazioni ' (¹).

P 23 — *Tr.* « Una similitudine, che tenga fermi tre punti non collineari, non « può esser che la simmetria rispetto al piano di questi, seppur non è la « trasformaz.ª identica. Ved. P 2 ». Se A, B, C sono i punti che si suppongon tautologi, ciascun punto sia della retta AB, sia delle rette AC, BC, sarà convertito in sè stesso (P 22); e per cons. ogni sfera, che abbia il centro in A, o in B, o in C, sarà necessariamente tautologa (P 20 § 2, P 1). Ne viene, che ciascun punto del piano ABC corrisponde a sè stesso (P 27 § 1); e che un punto esterno al piano ABC,

(¹) E la maniera onde si stabilisce non è diversa da quella che l'A. già tenne e sviluppò nella Nota « *Circa il teorema fondamentale di Staudt*, ecc. ». (Atti d. Acc. di Scienze d. Torino, vol. XXXIX, 1904).

— sia per es. D — tutto che scelto ad arbitrio, avrà per immagine un punto D′ comune alle sfere D_A, D_B, D_C: per la qual cosa D′ coinciderà con D, ovver col simmetrico di questo punto rispetto al piano ABC (P 29-31 § 2). Ma nel primo caso ogni punto coinciderà con la propria immagine (P 40 § 2) — perchè le sfere intorno al punto D saranno anch'esse tautologhe — e nell'altro caso ogni punto esterno a quel piano è diverso dal punto omologo. Ecc.]. — E n'esce altresì dimostrato il seguente:

P **24** — *Tr.* « Una similitudine, la quale consenta più punti tautologi non « complanari, si confonde con l'identità ».

P **25** — *Tr.* « Dati i punti non collineari A, B, C, qualsivoglia rotazione $\mathfrak{R}$ « intorno alla retta BC si può sempre aver componendo lo specchiamento al piano « ABC con lo specchiamento al piano polare dei punti A ed $\mathfrak{R}$A. Ved. P 38 § 2 e « P 4, 5, 8 ». [Si può conceder che AB sia perpendicolare a BC. — Or se $\mathfrak{R}$ fosse precisamente il semigiro intorno alla retta BC (P 7), basterebbe appellarsi a P 6. Poniamo dunque che la rotazione onde si parla sia diversa dal semigiro; e subordini ai punti (distinti) A_1 ed A i punti A ed A′: di guisa che $\mathfrak{R}A_1 = A$ e $\mathfrak{R}A = A'$. I punti A e A′ giacciono insieme sulle due sfere tautologhe A_B e A_C (P 23 § 2), e il lor punto medio — che chiameremo D — non appartiene all'asse (P 10): onde la retta AA′ è normale ad ambo le rette DB e DC (P 3, 5 § 2) e i punti A e A′ sono l'un l'altro simmetrici rispetto al piano BCD. Osservate che — posto $D_1 \equiv A_1|A$ — sarà D_1 fuor di BC come D; e i punti D_1 e D saranno omologhi secondo $\mathfrak{R}$ (P 23 § 2) e p. c. diversi fra loro (P 8): onde A_1 è diverso da A′; e i punti A_1, A ed A′, in quanto appartengono tutti alla sfera A_{1B}, non collineano (P 55 § 1). Inoltre la retta BC, supposta normale a BA, è altresì perpendicolare a ciascuna delle BA_1, BA′ (P 23 § 2). D'altra parte $\mathfrak{R}$ subordina la polosfera dei punti A, A′ a quella dei punti A_1, A: queste due sfere sono dunque simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un piano, che passa per l'asse BC (P 11); e p. c. simmetrici l'uno dell'altro, rispetto al medesimo piano, anche i centri D_1 e D, come pure i due cerchi A_{1D_1} e A_D, che il piano A_1AA', perpendicolare in B a BC (P 34, 35 § 2) determina su quelle sfere. Detti cerchi si taglieranno in due punti distinti A ed E, poi che A non spetta a DD_1 (P 47 § 1); e il piano polare di questi punti A ed E conterrà D_1 e D (P 38 § 2), ma non la retta BC, visto che i punti B, C, D e D_1 non sono complanari (P 10). Dunque è forza che ognuno dei punti A ed E sia convertito in sè stesso dalla simmetria che scambia fra loro i due cerchi: onde ABC sarà il piano di simmetria; e p. c. anche i punti A_1 ed A′ n'esciranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto al piano ABC. Di qui si deduce, indicando con $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{M}$ gli specchiamenti nei piani BCA, BCD: $\mathfrak{R}A = A' = \mathfrak{M}\mathfrak{L}A$, $\mathfrak{R}A_1 = A =$ $= \mathfrak{M}\mathfrak{L}A_1$, $\mathfrak{R}B = B = \mathfrak{M}\mathfrak{L}B$, $\mathfrak{R}C = C = \mathfrak{M}\mathfrak{L}C$. Pertanto la similitudine $\overset{-1}{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}\mathfrak{L}$ converte in sè stesso ciascuno dei punti non complanari A, A_1, B, C; dunque (P 24) $\overset{-1}{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}\mathfrak{L} = 1$, e p. c. $\mathfrak{M}\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$: c. v. d.]. — Con questo ragionamento abbiamo altresì dimostrato che:

P **26** — *Tr.* « Sotto le stesse Ipts., la rotazione $\mathfrak{R}$ risulta ancora dallo spec- « chiamento al piano BCD, seguito dallo specchiamento al piano A′BC; ovvero dallo

« specchiamento a BCD, seguito dallo specchiamento ad ABC ». — E resta provato altresì che:

P **27** — *Tr.* « Se per mezzo d'una rotazione arbitraria si passa da un punto A_1, « dato a piacere, ad un altro punto A diverso dal primo, la stessa rotazione dovrà « trasferire quest'altro punto A nel simmetrico di A_1 rispetto al piano che unisce « A con l'asse ». — Per la qual cosa:

P **28** — *Tr.* « Due diverse rotazioni intorno al medesimo asse, capaci sì l'una « che l'altra di coordinare ad un punto, il quale non giaccia sull'asse, un medesimo « punto, non posson coesistere ». — E qui tosto:

P **29** — *Tr.* « È unica la rotazione, che trasferisce un dato semipiano in un « altro, ambedue limitati dall'asse. Ved. P 9 ».

P **30** — *Tr.* « Qual si voglia similitudine, per cui sian tautologhi i punti « d'una medesima retta ed essi soltanto, è una rotazione. Ved. P 8, 23 ». [A, B, C siano punti non collineari; e poniamo che la similitudine $\mathcal{S}$ converta in sè stesso ciascuno dei punti B e C — e p. c. ogni punto della congiungente BC (P 22) — ma non abbia altri punti tautologi. Dicasi A′ quel punto, che $\mathcal{S}$ sostituisce ad A; e D sia il punto medio fra questi. Si può conceder che AB — e p. c. anche A′B — sia normale a BC. I punti B ed A′, certamente diversi fra loro, equidistano dal punto B; però che la sfera A_B è tautologa rispetto a $\mathcal{S}$. Ora esiste di certo una rotazione $\mathfrak{T}$ intorno alla retta BC, che subordina il semipiano BC verso A′ al semipiano BC verso A (P 9), dunque il raggio B verso A′ al raggio B verso A, e p. c. A′ ad A (P 37 § 3). Pertanto la similitudine $\overset{-1}{\mathfrak{T}}\mathcal{S}$ converte in sè stesso ciascuno dei punti A, B, C: onde: $\overset{-1}{\mathfrak{T}}\mathcal{S} = 1$ (vale a dire $\mathcal{S} = \mathfrak{T}$), oppure $\overset{-1}{\mathfrak{T}}\mathcal{S} =$ /ABC (P 23). Ma il secondo evento è da escludere, poi che da $\mathcal{S} = \mathfrak{T}$ |/ABC{ nascerebbe, grazie a P 25: $\mathcal{S} =$ /DBC . /ABC . /ABC .; onde $\mathcal{S} =$ /DBC, che è contro l'Ipts. (P 31 § 2)].

P **31** — *Df.* « Si dirà che le coppie di punti (A, B) e (C, D) sono '*congrue* « (*o congruenti*) *fra loro*' — o si scriverà, se ci piace, '(A, B) $\asymp$ (B, C)' — « per significar che le sfere B_A e D_C son simmetriche l'una dell'altra ». — Dicendo 'simmetriche' si sottintende "rispetto al punto medio dei centri"; ovvero — quando A e C non coincidano — "rispetto ad un asse perpendicolare in A|C alla linea dei centri", o "rispetto al piano polare dei centri": che è sempre la stessa cosa, in virtù di P 43, 46 § 2.

P **32** — *Tr.* « Premesso che A, B, C, D, E, F sono punti: 1) se (A, B) è « congruente a (C, D), viceversa (C, D) sarà congruente ad (A, B); 2) se avvien che « le coppie (A, B) e (C, D) siano congrue fra loro, e così le (A, B) ed (E, F), « eziandio le (C, D) ed (E, F) saranno congrue fra loro [P 13]; 3) le coppie (A, B), « ed (A, B) come pure le (A, A) e (B, B), e similmente (A, B) e (B, A), sono « congrue fra loro [P 46 § 1, P 44 § 2] ».

P **33** — *Tr.* « Ogni qualvolta due coppie di punti sono congrue fra loro si « può sempre passare dall'una all'altra per mezzo d'un semigiro, o attraverso due « semigiri ». [Se (A, B) $\asymp$ (C, D) ed A $\sim=$ C, il semigiro intorno ad un asse normale alla retta AC nel punto A|C porterà A in C; e di B farà un punto B′, che deve giacer su D_C per Ipts. (P 31, ecc.). Or se B′ = D, non c'è altro da fare.

Ma se B′ è diverso da D, perchè si converta in D, fermo restante C, basterà che si effettui anche il semigiro intorno ad un asse il quale contenga C e sia normale alla retta B′D (P 3-5 § 2).]

P 34 — *Tr.* « Dir che le coppie di punti (A , B) e (C , D) siano congrue fra « loro, o che le polosfere di (A , B) e (C , D) sian simmetriche l'una dell'altra, è « la stessa cosa. Ved. P 4 § 3 ». [Se p. es. $(A, B) \asymp (C, D)$, la simmetria rispetto al punto A|C, permutando le sfere B_A e D_C (P 31), rappresenta B in un punto B′, che deve giacer su D_C; e converte la Sfr(A , B) nella Sfr(C , B′). Or, se $B' \sim= D$, la polosfera dei punti C e B′ e quella dei punti C e D son simmetriche l'una dell'altra rispetto ad un asse, il quale contenga C e sia normale alla retta B′D. Dunque la polosfera di (A , B) simmetrica alla polosfera di (C , D) (P 13). — E se viceversa le polosfere di (A , B) e (C , D) son simmetriche, e i punti A′ e B′ corrispondono ai punti A e B; allora, ove già non coincidano i punti B′ e D, le sfere D_C e $B'_{A'}$ si scambieranno fra loro per mezzo del semigiro intorno ad un asse, il quale contenga C|D e sia normale a B′D: onde $(A, B) \asymp (A', B) \asymp (C, D)$; ecc.]. — Grazie a questa prps., la ' *congruenza* fra coppie di punti ' (P 31) si potrebbe altresì definire sostituendo alle sfere B_A e D_C le polosfere inerenti a quelle due coppie: se non che il pregio della simmetria verbale non compensa, secondo me, l'intervento dei punti medi e delle congiungenti, che si evita nell'altro modo.

P 35 — *Tr.* « Se una similitudine è tale, che una coppia di punti l'un l'altro « distinti sia congruente alla coppia omologa, allora due coppie omologhe quali che « siano risultan congrue fra loro ». [Una similitudine $\mathcal{S}$ coordini ai punti A e B (diversi fra loro) i punti A′ e B′; e siano congrue fra loro le coppie (A , B) e (A′ , B′). Indichiamo con $\mathfrak{C}$ una similitudine (semigiro, o prodotto di due semigiri) capace di trasferire (A , B) in (A′ , B′) (P 33); così che $\mathfrak{C}A = \mathcal{S}A = A'$, $\mathfrak{C}B = = \mathcal{S}B = B'$. Allora la trasformazione $\overset{-1}{\mathfrak{C}}\mathcal{S}$ — risultante, o prodotto di $\mathcal{S}$ per la similitudine inversa di C — sarà una certa similitudine (P 2) che tiene fermo ciascuno dei punti A e B: dunque una similitudine, per cui tutti i punti di AB son tautologi (P 22). Ora una trasformaz.^e sì fatta necessariam.^e equivale ad una rotazione $\mathfrak{R}$ intorno ad AB, oppur si confonde con lo specchiamento $\mathfrak{F}$ ad un certo piano che passa per questa retta, oppure è l'identità (P 30, 23, 24): onde avremo:

$$\mathcal{S} = \mathfrak{C}\mathfrak{R}, \text{ oppure } \mathcal{S} = \mathfrak{C}\mathfrak{F}, \text{ oppure } \mathcal{S} = \mathfrak{C}.$$

D'altra parte ciascuna delle $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{F}$ converte ogni sfera in un'altra, ch'è sempre a quella simmetrica (P 52 § 1; P 23, 41 § 2; P 11, 13): così dunque anche $\mathcal{S}$ (P 13); e resta sol da appellarsi a P 31].

P 36 — *Df.* « La similitudine, che rappresenta ogni coppia di punti in un'altra « congrua alla prima — ovver (che è lo stesso) ogni sfera in un'altra sim- « metrica a quella — prende il nome di ' *isomeria* ' [1]. ' *Isomere* ' son da

[1] Nome che (se non erro) fu già proposto da CH. MÉRAY nei *Nouveaux éléments de Géométrie* (Paris, 1874), e comprende tutte le operazioni fondamentali chiamate altresì ' movimenti di 1ª e 2ª specie ', ' eguaglianze metriche ', o semplicemente ' eguaglianze '. Se non che questa parola ' eguaglianza ', racchiude un senso ben più generale ed astratto, comune a quasi tutte le scienze; onde spetta naturalmente alla Logica.

« chiamar due figure che si corrispondon fra loro, punto per punto, secondo una « ' isomeria ' ». Una relazione sì fatta è palesemente invertibile, cioè conversiva o reciproca; e per affermare ch' essa abbia luogo in ordine a date figure F, F' noi scriveremo talvolta F ≍ F': dove il segno ' ≍ ' si legge ' *è isomera con* '. — « Ma « ogni qual volta si parli di *figure piane* (coppie di punti, segmenti, angoli, triangoli, cerchi, ecc.) che si corrispondon per mezzo di un' isomeria, le chiameremo « altresì ' *congruenti* fra loro ', o ' *sovrapponibili* '. Ved. P 1, 31, 35 ». Di dir qui tosto, in virtù di P 32:

P **37** — *Tr.* « Qualunque figura è isomera di sè medesima: cioè l' identità « spetta all' isomeria. Da F ≍ F' si deduce F' ≍ F: cio è l' operazione inversa « d' ogni isomeria sarà sempre un' isomeria. Due figure, ciascuna isomera con una « terza figura, sono anche isomere fra loro; onde l' isomeria è transitiva, vale a « qualsivoglia prodotto d' isomerie sarà sempre un' isomeria ».

P **38** — *Tr.* « La simmetria, la rotazione — e ogni trasformazione com« posta di simmetrie o di rotazioni — sono tutte isomerie. Viceversa un' isomeria « qualsivoglia, se non è simmetria, sarà eguale al prodotto di due o più sim« metrie ». [La prima parte è conseguenza immediata di P 22 § 2 e P 2, 35-37. L' altra si è già stabilita implicitamente nel dimostrare la P 35].

P **39** — *Tr.* « Purchè gli A, B, C siano punti non collineari e così D, E, F, « esiste almeno un' isomeria che traduce A in D, il raggio A verso B nel raggio D « verso E, e il semipiano AB verso C nel semipiano DE verso F ». [L' equinversione rispetto al punto A|D rappresenti B e C coi punti B' e C'; e, se B' non è già nel raggio |DE, sia B'' la traccia di questo raggio sopra la sfera B'_D (P 37 § 3). Allora — secondo che i punti B', B'' e D sono, o non son, per diritto — l' equinversione rispetto a D, o il semigiro intorno alla retta che unisce i due punti B'|B'' e D, porta B' in B'' tenendo fermo D; e a C' dà per immagine un punto, che chiamerò C''', esterno alla retta DE. Appresso, ove questo punto già non appartenga al semipiano DE verso F, esiste una rotazione (intorno la retta DE) che ce lo conduce (P 44 § 3, P 7, 9) senza alterar B'' nè D (P 23 § 2). E così per mezzo di isomerie (P 38) siam passati da A, |AB, |(AB)C a D, |DE, |(DE)F; e resta sol da appellarsi a P 37]. Or se qui supponiamo le rette AC, DF perpendicolari alle rette AB, DE, bisognerà che anche il raggio |AC si sovrapponga al raggio |DF (P 11 § 2, ecc.), e l' angolo Â . BC all' angolo D̂ . EF (P 47 § 3): per la qual cosa:

P **40** — *Tr.* « Tutti gli angoli retti sono congrui fra loro. Ved. P 36 ». — Inoltre :

P **41** — *Tr.* « Due raggi, o due semipiani, tutto che dati a piacere, son sempre « congrui fra loro; e sempre in essi le origini si corrispondon fra loro. Ved. P 54 § 3 ».

P **42** — *Tr.* « Nell' Ipts. P 39, se $\mathcal{O}$ è un' isomeria che rispecchi ordinatamente « gli A, |AB, |(AB)C con D, |DE, |(DE)F, qualunque isomeria che produca questo « medesimo effetto sarà equivalente ad $\mathcal{O}$, oppure ad $\mathcal{O}$ seguìta dallo specchiamento « nel piano DEF ». [Invero — posto $B' \equiv \mathcal{O}B$, $C' \equiv \mathcal{O}C$, $\mathcal{S} \equiv /DEF$ — e detta ∂ un' isomeria capace di rappresentar (come $\mathcal{O}$) gli A, |AB, |(AB)C con D, |DE, |(DE)F, bisognerà che anche ∂ traduca B in B' (P 37 § 3); quindi le sfere C_A e C_B nelle sfere omologhe a queste per simmetria rispetto ad A|D e a B|B' (P 31, 38), cioè

nelle sfere C'_D e $C'_{B'}$; insomma il punto C — comune a C_A, C_B e |(AB)C — nel punto C', ch'è *il solo* punto comune a C'_D, $C'_{B'}$ e |(DE)F (P 47, 49 § 1, P 44 § 3, ecc.). Dunque le isomerie $\mathcal{O}$ ed $\mathcal{J}$ rappresentan, sì l'una e sì l'altra, i punti A , B , C coi punti D , B' , C'; per la qual cosa il prodotto $\mathcal{J}\overset{-1}{\mathcal{O}}$ è un'isomeria che tien fermo ciascuno dei punti non collineari D , B' , C'. Dunque $\mathcal{J}\overset{-1}{\mathcal{O}} = 1$, oppure $\mathcal{J}\overset{-1}{\mathcal{O}} = \mathcal{S}$ (P 23); sicchè (moltiplicando a destra per $\mathcal{O}$): $\mathcal{J} = \mathcal{O}$, oppure $\mathcal{J} = \mathcal{S}\mathcal{O}$].

P **43** — *Tr.* « Ogni qualvolta A , B , C sono punti non collineari, bisognerà che i due raggi |AB e |AC sian simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad *un asse*: onde la coppia dei raggi |AB e |AC sarà sempre congrua alla coppia |AC e |AB ». Eucl., libro I, prp. IX. [Se D è quel punto di |AC, che dista da A quanto B (P 37 § 3), que' due raggi si scambieranno fra loro per mezzo del *semigiro* intorno alla congiungente di A col punto B|D (P 3-5 § 2; P 34 § 3)].

P **44** — *Tr.* « Se due segmenti o due angoli piani convessi sono congrui fra loro, anche la coppia dei punti estremi o dei lati dell'uno sarà congrua alla coppia dei punti estremi, o dei lati, dell'altro: e reciprocamente ». [Così da P 54, 55 § 3, ecc.].

P **45** — *Tr.* « Qualunque volta i punti A , B , C non collimano, e D sia un punto del semipiano da AB verso C, ma esterno al raggio |AC, non potrà darsi che gli angoli $\hat{A}$. BC , $\hat{A}$. BD siano congrui fra loro ». [Poi che *l'identità* converte gli A , |AB , |(AB)C rispettivamente in A , |AB , |(AB)C, *nessun' altra* isomeria produrrà quel medesimo effetto, tranne lo specchiamento al piano ABC (P 42). che non altera alcuno degli elementi suddetti. Dunque, intanto che il raggio |AD è diverso dal raggio |AC, la coppia (|AB , |AC) non sarà congrua alla coppia (|AB , |AD) (P 41, 54 § 3), quindi nemmeno alla coppia (|AD , |AB) (P 37, 43): sicchè gli angoli $\hat{A}$. BC e $\hat{A}$. BD non potranno esser congrui fra loro (P 44).] — E di qui nasce, avuto riguardo a P 42, 43 § 3:

P **46** — *Tr.* « E, se C' = C/AB, nessun raggio avente origine in A e giacente sul piano ABC, ma diverso da ognuno degli |AC , |AC' può racchiuder col raggio |AB un angolo congruo ad $\hat{A}$. BC. Ved. P 47 § 1 ».

P **47** — *Tr.* « Nessun angolo piano è simmetrico di sè medesimo, rispetto a *due rette diverse* ». [A , B , C siano punti non collineari, e C disti da A quanto B. Che, rispetto ad un certo asse *r*, l'angolo $\hat{A}$. BC (o $\check{A}$. BC) sia simmetrico di sè medesimo, già si sa da P 43, 44. D'altra parte *ogni assial simmetria*, che rispecchi in sè stesso quell'angolo, dovrà permutarne i due lati |AB e |AC (P 55 § 3): perchè, se potesse rappresentarli ciascuno in sè stesso, terrebbe fermo anche ognuno dei punti A , B , C (P 37 § 3). Dunque una tal simmetria dovrà permutar B con C (ibid.), senza rimuovere A: e però l'asse di simmetria, contenendo ambo i punti (l'un l'altro distinti) A e B|C (P 54 § 1), si confonde necessariamente con *r* (P 19 § 1).]

P **48** — *Df.* « '*Bisettrice* di *un angolo piano*' è quella *semiretta*, che ha come origine il *vertice*, e giace ad un tempo nell'angolo dato e nell'*asse di simmetria* del medesimo. Ved. P 47 § 3 e P 43, 47 ».

P **49** — *Tr.* « Se due angoli piani convessi sono congrui fra loro, tali saranno anche gli angoli convessi, che le *bisettrici* di quelli formano rispettivamente

« coi lati dell'uno e dell'altro. Ved. P 48 ». [In vero l'isomeria, che è per sovrapporre l'uno degli angoli all'altro (P 36), dovrà eziandio sovrapporre le bisettrici, grazie a P 47.]

§ V.

*Relazione di **minore** e **maggiore** fra due segmenti od angoli piani. **Congruenza** dei triangoli. **Somma** di due segmenti o di due angoli piani convessi. Altre proprietà di triangoli, cerchi, sfere, ecc.*

P 1 — *Df.* « Se A, B, C, D sono punti, A diverso da B, l'asserir che " il
« segmento |AB| *è minor* del segmento |CD| ", o che " |CD| *è maggiore* di
« |AB| " — '(|AB|<|CD|', o '|CD|>|AB|)' — è un modo di esprimer qualmente; " esiste
« un' isomeria, per la quale un estremo, A o B, del primo segmento si trasferisce
« a un estremo, C o D, del secondo; e l'altro estremo di |AB| ad un punto, che
« giace fra C e D "; ovver, che è lo stesso: " esiste fra i punti C e D un punto
« — sia per es. X — tale che |AB| sia congruente a |CX| o a |DX| ". Vedasi
« P 10 § 3 e P 36 § 4. E allorquando i punti A e B si confondon tra loro, la frase
« '|AB|<|CD|', o l'altra '|CD|>|AB|', servirà unicamente ad esprimere che " i
« punti C e D non coincidono " — Corollari quasi immediati i seguenti: " Ogni qual
« volta C appartiene ad |AB|, ma è diverso da B, sarà sempre |AC| minore di |AB| "
« (P 37 § 4). E: " Se due segmenti sono congrui fra loro, la medesima relazione
« di <, ≍, o >, che interceda per avventura fra il primo di essi ed un terzo,
« avrà luogo eziandio fra il secondo ed il terzo ". (Ivi) ».

P 2 — *Tr.* « Se A, B, C, D sono punti, e |AB| è minor di |CD|, esisterà senza
« fallo un' isomeria che inserisce |AB| in |CD|, ancorchè sia prescritto quale dei punti
« estremi A e B vogliam che si porti in C, o qual degli estremi C e D si vuole
« occupar con A. Ved. P 1 ». [In vero, se per mezzo di un' isomeria si può fare, che A venga tradotto in C, e B fra C e D; si potrà ulteriormente tradurre A in D, con l'aggiunta di un' equinversione rispetto al punto C|D; e ciò senza distoglier B dall'interno del segmento dato |CD|. Ecc.].

P 3 — *Tr.* « Dati a piacere quattro punti A, B, C, D, delle tre cose l'una:
« o |AB| sarà congruo a |CD|, o |AB| minor di |CD|, o |AB| maggior di |CD|;
« e ciascuno di questi casi escluderà gli altri due ». [Mi restringo a supporre A ∼= B e C ∼= D. Circa la prima parte del Tr. basta portare il raggio |AB sopra l'altro |CD, a tenore di P 41 § 4; dopo di che, se B non cadrà su D, bisognerà che addivenga in un punto interno a |CD|, ovver nel prolungamento oltre D (P 29 § 3). — Ora, se per es. |AB| ≍ |CD|, non può esistere un' isomeria che trasporti A in C, e B in un punto B', il quale appartenga a |CD| senza coincider con D: però che un segmento come |CB'| non è mai congruente a |CD| (P 46 § 1, P 37 § 2, P 31 § 4). Così resta provato che il fatto |AB| ≍ |CD| non va d'accordo col fatto |AB|<|CD|

(P 2), nè con l'altro $|CD| < |AB|$; essendo qui lecita la sostituzione $\binom{C, D, A, B}{A, B, C, D}$.
E con un simile ragionamento si prova eziandio l'incompatibilità delle ipts. $|AB| < |CD|$ e $|CD| < |AB|$, che involgerebber l'esistere di isomerie capaci di rappresentare l'una i punti (A, B) coi punti (C, B') — B' giacente fra C e D — l'altra i punti (C, D, B') coi punti (A, D'', B'') — D'' giacente fra A e B, B'' fra D'' ed A — e perciò anche d'isomerie che trarrebbero B in B'' senza rimuovere A (P 37 § 4): ecc.] — E con questo abbiamo altresì dimostrato il seguente:

P 4 — *Tr.* « E se A non coincide con B, nè C con D, qualsivoglia isomeria « che abbia effetto di sovrapporre il raggio |AB al raggio |CD, farà che B si con« verta in un punto interno od esterno a |CD|, ovver coincidente con D, « secondo che |AB| sia minore, o maggiore, o congruo a |CD| ».

P 5 — *Tr.* « Se di tre dati segmenti il primo è minor del secondo, e questo « è minore del terzo, anche il primo sarà minore del terzo ». [Siano A, B, C, D, E, F punti dati. Se p. es. l'isomeria $\mathfrak{J}$ traduce A in C, e B in un punto B' fra C e D (P 1); e similmente l'isomeria $\mathfrak{L}$ porta C in F, e D in un punto D'' tra F ed E: allora B', a cagione di $\mathfrak{L}$, verrà condotto in un punto B'' tra D'' ed F, poi che il giacer fra due punti è proprietà covariante di questi, rispetto all'isomeria (P 3, 36 § 4). Perciò B'' è fra i punti F ed E (P 19 § 3); dunque il segmento |AB|, congruente a |CB'|, sarà minor del segmento |FE| (P 1). Ecc.].

P 6 — *Tr.* « Qualunque siano i punti A, B, C e secondo che |AC| è minore, « maggiore, o congruo ad |AB|, il punto C sarà interno, od esterno, o appar« tenente alla sfera B_A. Ved. P 5 § 3 ». Se p. es. $B \sim= A$ e $|AB| < |AC|$, dovrà esistere un'isomeria che, non alterando A, muti B in un punto B' fra A e C (P 1, 2): onde C esterno ad |AB'| (P 11, 12 § 3). D'altra parte C sarà esterno ad |AB''|, se $B'' \equiv B'/A$; in quanto giace nel raggio |AB' (P 29 § 3), che non ha punti a comune col raggio |AB'', eccezion fatta di A (P 30, 32 § 3), ma C è diverso dai punti A, B', B''. Dunque C esterno al segmento |B'B''| (P 11, 20 § 3), che è quanto dire esterno alla sfera B_A (P 6, 10 § 3). — E così dall'ipts. $C \sim= A$ e $|AC| < |AB|$ nasce che (A, C) $\asymp$ (A, C'), essendo C' un punto compreso fra A e B. Ma un tal punto è obbligato a giacer fra B e B/A: dunque C', e p. c. anche C, sarà interno alla polosfera dei punti B e B/A (P 10 § 3), vale a dire a B_A].

P 7 — *Tr.* « Qualunque siano i punti A, B, C, se C sarà interno alla sfera di « B, centro A, allora B sarà esterno alla sfera C_A; e reciprocamente: inoltre ogni « punto interno a C_A sarà interno a B_A ». [Così da P 6, 5, ecc.].

P 8 — *Tr.* « E ogni retta che passi da un punto interno, taglia la sfera in « due punti, sempre diversi fra loro ». [Il punto C sia, come dianzi, interno alla sfera B_A. Or se la retta passi per A, o sia perpendicolare a CA, si ritorna a P 20 § 2, o a P 7, 3 § 3. Se no, calata dal centro la perpendic.ª AD sulla retta, il piede risulta interno a C_A (P 26 § 3), dunque interno a B_A (P 7): dunque è vero che la DC (in quanto è normale a DA) ne incontra due volte la sfera].

P 9 — *Tr.* « Qualunque retta contiene dei punti esterni a una sfera data a « piacere ». [La data sfera sia p. es. B_A: si può conceder che $B \sim= A$. Or se la retta è tangente alla sfera in un punto C, ogni suo punto diverso da C sarà

esterno (P 27 § 3). E se un punto D sulla retta è interno alla sfera, così che |AD| < |AB| (P 6); allora, preso un punto esterno a piacere — quale ad es. A′ = A/B — sarà inoltre |AB| minore di |AA′|; dunque |AD| < |AA′| (P 5), e p. c. D interno alla sfera A'_A (P 6). Questa pertanto s'incontra con la retta data (P 8), e i punti comuni saranno esterni a B_A come A′ (P 8 § 3)].

P 10 — *Tr.* « I punti A e B son distinti, C è punto esterno a B_A, ϱ un piano « che passa per tutti e tre: si dimostra che in questo piano si posson tirar da quel « punto due rette tangenti alla sfera ». Eucl., lib. 3°, prp. XVII. [Uno qualunque dei punti, dove s'incontran la retta CA e la sfera B_A (P 20 § 2), sarà interno alla sfera C_A (P 7), e sia p. es. D: onde la retta perpendic.ᵃ a CA, che nel piano ϱ può condursi dal punto D, taglia in due punti la sfera C_A. Detti E ed E′ questi due punti, ed F, F′ i piedi delle normali abbassate dal punto C alle rette AE, AE′; se si ribalta il piano ϱ su sè stesso intorno ai punti (diversi fra loro) A e C|E come cardini (P 51 § 1), ne usciranno scambiati fra loro i punti C ed E, e permutate le rette CA, EA. Dunque la retta ED, perpendic.ᵃ a CA, cuopre la retta CF, perpendic.ᵃ ad EA (P 9, 23 § 2); dunque anche i punti D ed F si barattan fra loro: e perciò F, come D, starà sul cerchio B_A che non s'altera (P 50 § 1); e la retta CF è tangente, al pari di ED (P 8 § 2). Così ancor CF′ è tangente: e il Lettor può vedere, che queste due rette CF′ e CF non coincidono].

P 11 — *Tr.* « Sempre che gli A, B, C siano punti, C giacente fra A e B; la « polosfera di (A, B) e la sfera di C intorno ad A s'incontrano ». [Posto M = A|B ed N = A|C, converrà che il punto N stia fra i punti M ed A: se no M sarebbe interno ad |AN| (P 29, 33 § 3) — visto che gli M, N, A son distinti e che M, N ε |AB| — e però B giacerebbe fra A e C (P 14 § 4), contro l'Ipts. (P 12 § 3). Dunque M esterno alla sfera N_A (P 1, 6); dunque esiste sopra N_A qualche punto D tale, che MD ⊥ DA (P 10, ecc.). Ora il punto A/D giacerà sulla sfera A_M (P 3-5 § 2), che è la sfera polare di A e B; come ancor sulla sfera C_A, visto che il punto A/D si scambia col punto A/N, ossia con C, (e C_A si converte in sè stessa) per mezzo del semigiro intorno ad un asse il quale contiene A].

P 12 — *Df.* « Di due angoli piani convessi (e così per due angoli concavi) si « dice che il primo '*è minore*' ('<') del secondo, o che questo '*è maggiore*' « ('>') del primo, ogni volta ch'esiste un'isomeria per la quale un lato del primo « angolo si sovrappone ad un lato del secondo angolo, e l'altro lato del primo ad « un raggio interno al secondo. Ved. P 47 § 3 e P 41 § 4 ». — Vale a dire — se p. es. Â . BC e D̂ . EF sono gli angoli dati (premesso che non collineano i punti A, B, C, nè i punti D, E, F) — « ogni volta ch'esisterà un punto X interno a D̂ . EF e tale che l'angolo Â . BC sia congruo all'angolo D̂ . EX o all'angolo D̂ . FX ». Cfr. P 1. — Se non vogliamo distinguer fra 'convesso' e 'concavo', potremo anche adottar la seguente dfnz. (che, sotto forma poco diversa, equivale alla preced.ᵃ nei casi che l'una e l'altra contemplano): « Si dice che l'angolo α, convesso o concavo, « *è minore* dell'angolo β (eziandio convesso o concavo) per affermar l'esistenza di « un angolo congruo con α, il quale abbia un lato a comune con β e sia contenuto « da β, pur senza coincider con β ». — Giova osservar senza indugio, che a cagione di P 43 § 4 abbiamo:

P 13 — *Tr.* « Dati i punti A , B , ... F come sopra, se esiste un'isomeria che « coordini al raggio |AB il raggio |DE, e al raggio |AC un raggio interno all'an- « golo D̂ . EF (ovvero all'angolo D̂ . EF), dovrà esistere un'isomeria che trasformi « |AB in |DF, ed |AC (come l'altra) in un raggio interno a D̂ . EF (o rispettiv. a « D̂ . EF) ». Cfr. P 2.

P 14 — *Tr.* « Anzi ciascuna delle isomerie, che trasformano il raggio |AB e il « semipiano |(AB)C nel raggio |DE e nel semipiano |(DE)F, farà corrispondere al « raggio |AC un raggio interno, od esterno a D̂ . EF, secondo che l'angolo A . BC « sarà minore, o maggiore, dell'angolo D̂ . EF ». Cfr. P 4. [Se p. es. un'isomeria (che posso chiamare ∂) traduce |DE in |AB, ed F in un punto F′ interno all'angolo dato Â . BC (onde Â . BC > D̂ . EF), il raggio |AF′ dovrà passar fra B e C (P 47 § 3), tagliando ad es. quest'intervallo in G: per la qual cosa |AC, non passando fra B e G (P 12 § 3), sarà esterno ad Â . BF′ (P 48 § 3). Ne viene che la conversa $\overset{-1}{\partial}$ (P 37 § 4) porta |AB in |DE, F′ in F — dunque |(AB)C in |(DE)F (P 49, 41 § 3) — e C in un punto esterno a D̂ . EF. Ora, in virtù di P 42 § 4, le isomerie che convertono |AB in |DE e |(AB)C in |(DE)F saranno soltanto le equivalenti ad $\overset{-1}{\partial}$, ovvero ad $\overset{-1}{\partial}$ seguìta dallo specchiamento /DEF. Ecc.]

P 15 — *Tr.* « Sempre che gli A , B , C siano punti non collineari, e così « D , E , F, delle tre cose l'una: o l'angolo convesso Â . BC sarà minore, o maggiore, « o congruente all'angolo convesso D̂ . EF: ma di questi tre casi, due non si posson « mai dare ad un tempo ». Cfr. P 3. [Dalla P 45 § 4, attraverso P 37, 39 § 4 e P 14, ecc.].

P 16 — *Tr.* « Se di tre angoli il primo è minor del secondo, o congruo al se- « condo, e questo è minore del terzo, anche il primo sarà minore del terzo ». Cfr. P 5.

P 17 — *Tr.* « Se tanto A , B , C, quanto D , E , F, sono punti non collineari, e « i lati |AB|, |AC| e l'angolo Â . BC del triangolo |ABC| siano congrui rispettiv.^e ai « lati |DE|, |DF| e all'angolo D̂ . EF del triangolo |DEF|; sarà eziandio il terzo lato « |BC| congruo al terzo lato |EF|, e il triangolo congruente al triangolo; e dei rima- « nenti angoli saranno congrui fra loro B̂ . AC con Ê . DF, e Ĉ . AB con F̂ . DE, cioè « quelli racchiusi dai lati congrui. Ved. P 51 § 3 ». — Eucl., lib. 1°, prp. IV. [Perchè Â . BC ≍ D̂ . EF, dovrà esistere un'isomeria che traduce A in D, |AB su |DE, |AC su |DF (P 44 § 4, ecc.): sia p. es. $\mathfrak{M}$. Ora le coppie (D , E) e (D , $\mathfrak{M}$B) sono congrue fra loro (P 37, 44, 32 § 4); e dall'altra parte sul raggio |DE nessun punto diverso da E dista dal punto D quanto E (P 37 § 3). Dunque $\mathfrak{M}B = E$ (P 31 § 4). e al modo stesso $\mathfrak{M}C = F$: ecc.] — Anche la prps. che segue contempla, sebbene indirettamente, un caso di congruenza fra triangoli: ved. P 44 § 4.

P 18 — *Tr.* « Due terne di punti (A , B , C) e (D , E , F) saranno congrue « fra loro, se tali siano ad un tempo le coppie (A , B) con (D , E), (B , C) con « (E , F), (A , C) con (D , F) ». — Eucl., lib. 1°, prp. VIII. [In primo luogo suppongo A , B , C non collineari. Sia dunque $\mathfrak{L}$ un'isomeria per la quale $\mathfrak{L}A = D$, $\mathfrak{L}B = E$, $\mathfrak{L}C = C'$: onde i punti D , E , C′ non collimano. Or dal supposto che (A , C) ≍ (D , F) nascerà che (D , C′) ≍ (D , F): dunque $C' \varepsilon F_D$ (P 46 § 1, P 31 § 4)

e per egual modo C' ε F_E. Cosicchè se, per mezzo di rotazione intorno alla retta DE, conduciamo il punto C' in un piano ϱ che contenga tutti e tre i punti D, E, F (P 27 § 2), quel punto cadrà necessariam.ᵉ su qualche punto comune ai due cerchi F_D, F_E: quindi (P 47 § 1, ecc.) o cadrà in F senz'altro, o verrà in coincidenza con F dopo il ribaltamento di ϱ su sè stesso intorno ai punti D, E come cardini (P 49, 51 § 1). — Il resto al Lettore].

P 19 — *Tr.* « Essendo A, B, C punti non collineari, e D un punto arbitrario nel- « l'ombra di C da B pur che diverso da C); l'angolo Ĉ. AD — esterno al triangolo « |ABC| — sarà maggior di ciascuno degli interni opposti Â. BC e B̂. AC ». — Eucl., lib. 1°, prps. XVI. [Pongasi E ≡ A|C, F ≡ B/E. Il punto F giace nel semipiano |(AC)D, perchè la retta CA, passando fra B e D e fra B ed F, non può passar fra D ed F (P 16 § 3); e giace ancora nel semipiano |(CD)A, poi che la retta CD non potrebbe passare fra i punti F ed A, senza passare eziandio tra A ed E, ovver tra F ed E (P 13 § 3): dunque F ε Ĉ. AD (P 49 § 3), anzi F interno a quest'angolo. Pertanto Ĉ. AF < Ĉ. AD (P 12). Ma dall'essere i punti C ed F simmetrici degli A e B risp.ᵉ ad E, quindi simmetrici l'uno dell'altro i segmenti |BC| ed |FA| e p. c. anche gli angoli Â. BC e Ĉ. FA (P 47 § 3, ecc.), si deduce che questi saranno congrui fra loro (P 36 § 4). Dunque Â. BC < Ĉ. AD (P 16). — Resta il provare qualmente anche l'angolo B̂. AC sia minore di Ĉ. AD: ma si lascia al Lettore].

P 20 — *Tr.* « Se — essendo dati i triangoli |ABC| e |DEF| — gli angoli B̂. AC e « Ĉ. AB dell'uno siano congrui rispettivamente agli angoli Ê. DF, F̂. DE dell'altro, « e di più siano congrui fra loro anche i lati |BC| ed |EF| compresi negli angoli congrui « — oppure i lati |AB| e |DE|, che sono opposti ad angoli congrui; sarà l'angolo « rimanente Â. BC congruo al rimanente D̂. EF; e dei rimanenti lati saranno congrui « fra loro quelli che sono opposti ad angoli congrui, vale a dire |AB| con |DE|, |AC| « con |DF| ». — Eucl., lib. 1°, prp. XXVI. [Sia dapprima |BC| ≚ |EF|. Per Ipts. esiste un'isomeria — la chiameremo 𝔐 — che trasforma la coppia dei raggi |BA e |BC nella coppia |ED ed |EF (P 44 § 4): dunque tale eziandio che il punto 𝔐C si confonde con F, oltre che il punto 𝔐B con E, per le ragioni testè assegnate nella dimostrazione di P 17. Ora, se il punto 𝔐A non coincidesse con D, converrebbe supporlo interno al segmento |DE|, ovver nel prolungamento di questo oltre D (P 29 § 3); ma nell'un caso verrebbe ad esser Ĉ. AB minore di F̂. DE, nell'altro caso maggiore (P 12): ond'è forza che il punto 𝔐A si confonda con D (P 15); ecc. — Supposti invece congrui fra loro i due lati |AB| e |DE|: se come dianzi portiamo B̂. AC a coincider con Ê. DF, il punto A verrà in D; nè potrà darsi che C si riduca in un punto fra E ed F, nè che F rimanga compreso tra E e la nuova posizion di C: perchè nell'un caso l'angolo (𝔐C)DE, congruo a Ĉ. AB, risulterebbe maggiore dell'angolo F̂. DE; nell'altro, minore (P 19). Ecc.

P 21 — *Tr.* « Se in un triangolo — essendo A, B, C tre punti non collineari « — due lati |AB| e |AC| siano congrui fra loro, saranno congrui anche gli angoli « opposti a quei lati; e prolungando i segmenti |AB| e |AC| di là da B e C nei « punti D ed E, gli angoli B̂. CD e Ĉ. BE saranno anche congrui fra loro ». Euclide, lib. 1°, prp. V. [Dall'Ipts., attraverso P 44, 31 § 4 e P 46 § 1, deduciamo

che C appartenga alla sfera B_A; e che perciò, detto M il punto B|C, la retta BC sia normale alla retta MA (P 5 § 2). Dunque il ribaltamento del piano ABC su sè stesso intorno i punti M . A come cardini (P 51 § 1, ecc.) farà che gli angoli $\hat{B}$.AC e $\hat{C}$.AB si barattin fra loro, e così gli angoli $\hat{B}$.ED, $\hat{C}$.BE].

P 22 — *Tr.* « E se due angoli d' un triangolo sono congrui fra loro, eziandio i « lati, che sono opposti agli angoli congrui, saranno congrui fra loro ». Eucl., lib. 1°, prp. VI. [Se — essendo $\hat{C}$.AB e $\hat{B}$.AC gli angoli congrui — il lato |AC| fosse minore di |AB|, dunque congruo a un certo segmento |BD|, D giacente fra A e B (P 1, 2), sarebber congrui fra loro anche gli angoli $\hat{B}$.CA e $\hat{C}$.BD, grazie a $\begin{pmatrix} C, A, B, C, D \\ A, C, D, E, F \end{pmatrix}$ P 17; vale a dir $\hat{C}$.BA $\simeq$ $\hat{C}$.BD: ma ciò contradice a P 12, 15. Ecc.].

P 23 — *Tr.* « Al maggior lato di un triangolo è opposto il maggior angolo ». Eucl., lib. 1°, prp. XVIII. — Vale a dire — essendo ancora A , B , C punti non collineari — dall' essere |AB| minore di |AC| si deduce che $\hat{C}$.AB $<$ $\hat{B}$.AC. [Si può ragionare come Euclide al loc. cit., invocando successivamente le P 1, 2. 19, 21].

P 24 — *Tr.* « E, viceversa, al maggior angolo è opposto il maggior lato ». Eucl., lib. 1°, prp. XIX. [Dalle P 3, 21, 23, col noto ragionamento Euclidiano.]

P 25 — *Df.* « Dati a piacere due segmenti α e β, e presi i punti A , B , C « in maniera, che B giaccia in |AC| e che |AB| e |BC| siano congrui rispettivamente « ad α, β; l'attributo di '*somma*' dei due segmenti α e β' spetta a qualunque « segmento congruo al segmento |AC|, e non si dà che per esso ». — Cioè per '*somma* di α con β' — o '$\alpha + \beta$' — s'intende la "classe di tutti i segmenti congrui a un segmento |AC| come sopra". Ma le più volte (secondo l'uso) chiameremo anche 'somma' dei due segmenti un qualunque segmento di detta classe. — Occorre sol di premettere alla dfnz. (o di segnalar come chiosa) che " in qualunque modo si scelgano i punti A', B', C' sotto condizione, che B' appartenga ad |A'C'| e che |A'B'| e |B'C'| siano congrui rispettiv.e ad |AB| e |BC|, il segmento |A"C'| n'escirà sempre congruo al segmento |AC| ": in quanto (supposti gli A e B diversi fra loro) l'isomeria che traduce (A , B) in (A', B') (P 44, 32 § 4) rappresenta C in un punto C_1 del raggio |A'B' per modo che (B', C_1) $\simeq$ (B', C') (P 29 § 3, P 36, 37 § 4, ecc.): onde $C_1 \equiv C'$ (P 37 § 3).

P 26 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., tanto è sommare α e β, quanto sommar « β ed α; perchè in ambo i modi si ottengono segmenti congrui fra loro (proprietà « commutativa). E se di tre dati segmenti il primo è minore, o maggiore o con- « gruo al secondo, la somma del primo col terzo sarà minore, o maggiore, o congrua « alla somma del secondo col terzo ». [Invero — posto M $\equiv$ A|C e D $\equiv$ B/M — l'equinversione risp.e al punto M converte |AC| in sè stesso e permuta l'uno con l'altro i segmenti |AB| e |CD|, |BC| e |DA|: onde |AD| $\simeq \beta$, |DC| $\simeq \alpha$; e p. c. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. — Di poi, se p. es. $\alpha > \beta$ e sia γ un segmento arbitrario, si scelgano i punti D , A , B in maniera, che |DA| $\simeq \gamma$, |AB| $\simeq \alpha$, con A ϵ |DB|: allora fra A e B ci dovrà essere un punto C_1, per cui |AC_1| $\simeq \beta$ (P 1, 2). Ma un tale punto è obbligato a giacere eziandio fra D e B (P 19 § 3), anzi in modo che A ϵ |DC_1| (P 17 § 3): dunque il segmento |DB|, somma di γ con α (P 25), è maggiore del segmento |DC_1|, somma di γ con β. Ecc.].

P 27 — *Tr.* La somma di due lati d'un triangolo, presi in qualsivoglia modo, « è sempre maggiore del lato rimanente ». Eucl., lib. 1°, prp. XX. — O, in altri termini: « Purchè A, B, C siano punti non collineari, sarà maggior di |BC| qualunque segmento, che equivalga alla somma dei due segmenti |BA|, |AC| ». Ved. P 25. [La nota dms. Euclidiana riposa — oltre che in P 25 — sulle P 37 § 3 e P 12, 16, 21, 24].

P 28 — *Tr.* « E se D sia punto interno al triangolo |ABC|, i segmenti |BD|, « |DC| daranno una somma minore della somma dei lati |BA|, |AC| del triangolo, « ma conterranno un angolo maggiore: cioè $\hat{D}$. BC sarà sempre maggior di $\hat{A}$. BC ». Eucl., lib. 1°, prp. XXI [Dove occorron le P 51 § 3 e P 16, 19, 25, 26 27.] — Che esista un triangolo, i lati del quale sian congrui a tre dati segmenti, ciascuno minor della somma degli altri due, si dimostra più tardi (ved. P § 6): benchè l'esistenza d'una terna (X, Y, Z) di punti soggetti alla condizione, che i segmenti |XY|, |XZ|, |YZ| sian tutti congrui a un dato segmento |AB| — oppur tali, che |XY| e |XZ| siano congrui ad |AB|, ma |YZ| congruo ad un altro segmento minore del doppio di |AB| — è già fuor di questione, dopo le P 25 § 3 e P 11 (¹).

P 29 — *Tr.* « Sia D il piede della normale abbassata dal punto A alla retta « BC (sempre che gli A, B, C siano punti non collineari): se avverrà che il segmento « |DB| sia minor del segmento |DC|, sarà inoltre |AB| minore di |AC|. E, viceversa, « non potrà essere |AB| minore di |AC|, se non è anche |DB| minor che |DC| ». Legendre, *Elementi*, lib. 1°, prp. XVI. [Supposto che B non giaccia in |CD|, siano A' e B' i simmetrici di A e B rispetto a D. Il punto B' è interno a |CD| (P 4, ecc.), quindi interno al triangolo |CAA'| (P 51 § 3). Dunque |AA'| minor che la somma di |AB'| con |B'A'| (P 27); e questa minor di qualunque segmento, che spetti alla somma di |AC| con |CA'| (P 25, 28). Ora, poichè i segmenti |AB'| e |B'A'| sono congrui fra loro, e congrui del pari i segmenti |AC| e |CA'| (P 7 § 2, P 31 § 4, ecc.), si può invocare la P 14 § 4 e concluder che |AB'| < |AC| (P 1, 2, ecc.) — Il resto al Lettore.]

P 30 — *Tr.* « Se A, B, C sono punti, e C spetta alla sfera B_A, qualunque « punto che giaccia fra B e C sarà interno alla sfera; e, viceversa, ogni punto « interno alla sfera e allineato sopra due punti B e C della sfera, non coincidenti « fra loro, sarà interno al segmento |BC| ». Eucl., lib. 3°, prp. II. [Sia per es. D un punto fra B e C (onde B ∼= C) ed M = B|C. Se M = A, si ritorna a P 4, 10 § 3. Ma se M è diverso da A, la retta MA sarà perpendicolare alla retta BC (P 5, 6 § 2); per la qual cosa |MD| < |MB| ovvero |MD| < |MC|, secondo che D giacerà nel segmento |MB| o nel segmento |MC| (P 11, 19 § 3, P 1): dunque (P 29) |AD| minore di |AB|, ovvero di |AC|, che è lo stesso (P 1); e per cons. D interno alla sfera (P 6). — Appresso, se il punto E per es. sarà allineato coi punti B e C, oltre che interno alla sfera B_A, sappiamo che |AE| < |AB| (P 6), e per conseguenza |ME| < |MB| (P 29): dunque E interno a B_M (P 6), dunque interno a |BC| (P 10 § 3.] — E di qui si deduce, avuto riguardo a P 21 § 3 e P 8:

(¹) È noto che questi fatti, in quanto dipendono dall'esistenza di punti comuni a due cerchi, sono imperfettamente provati nel testo Euclidiano, quale ci è pervenuto. Ved. le prp. I e XXII del lib. 1°.

P 31 — *Tr.* « Il segmento che unisce due punti interni alla sfera sarà tutto « interno ». Cfr. P 53 § 3.

P 32 — *Tr.* « Se due triangoli hanno due lati congrui a due lati, l'uno al- « l'altro, ma gli angoli compresi da questi lati non son congruenti, il terzo lato sarà « maggior nel triangolo, dove l'angolo è maggiore ». Eucl., lib. 1°, prp. XXIV.

P 33 — *Tr.* « E se due triangoli hanno due lati congrui a due lati, l'uno al- « l'altro, ma i rimanenti lati non congrui, l'angolo compreso dai lati congrui sarà « maggior nel triangolo, dove il terzo lato è maggiore ». Eucl., lib. 1°, prp. XXV.

P 34 — *Df.* « Ogni qualvolta — essendo α, β due angoli piani c o n v e s s i — « si costruiscano gli angoli $\hat{O}$. AB, $\hat{O}$. BC, congrui rispettiv.° agli angoli dati « α e β, sotto condizione che il punto C sia nel piano dei punti non collineari « O, A, B, ma fuori del semipiano da OB verso A; allora il nome comune di « "*s o m m a* d e l l' a n g o l o α c o n l' a n g o l o β", o '*somma* d e g l i α, β', o '$\alpha + \beta$' « spetta: 1) a ciascun angolo congruo ad $\hat{O}$. AC, ovvero ad $\check{O}$. AC, se i punti B e « C giaceranno dalla stessa banda di OA, ovvero da bande opposte; 2) a qualsivoglia « s e m i p i a n o, se C cadrà sulla retta OA (che è quanto dir sul prolungamento di « |OA| oltre O). Ved. P 39, 45, 47 § 3 e P 39, 41 § 4 ». — Cfr. P 25. — Anche qui converrà far notare che (una volta assegnati α e β): " comunque si prendano i punti O′, A′, B′, C′ (sotto condizione ecc. ecc.) l'angolo $\hat{O}'$, A′C′ risulterà sempre congruo ad $\hat{O}$. AC »: in quanto l'isomeria che trasforma i raggi |OA e |OB nei raggi |O′A′ e |O′B′ (P 37, 44, 43 § 4), muti |OC in un raggio, il quale non può non coincider col raggio |O′C′, data la P 45 § 4.

P 35 — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., tanto è sommare α e β, quanto sommar « β ed α. E se di tre angoli piani convessi il primo è minore, o maggiore, o congruo al « secondo, la somma del primo col terzo sarà minore, o maggiore, o congrua alla somma « del secondo col terzo ». — Cfr. P 26 [Invero — supposto che i punti O, A, C non collimino, e detta |OM la b i s e t t r i c e dell'angolo $\hat{O}$. AC (o dell'angolo $\check{O}$. AC) che rappresenta la somma di α con β (P 48 § 4) — il semigiro intorno alla retta OM converte in sè stesso quell'angolo; dunque muta il raggio |OB in un altro |OD, eziandio contenuto dall'angolo, permutando l'uno con l'altro $\hat{O}$. AB e $\hat{O}$. CD, come pure $\hat{O}$. BC e $\hat{O}$. DA: sicchè $\hat{O}$. AD $\simeq \beta$, $\hat{O}$. DC $\simeq \alpha$. Ma i punti A e C, come giacciono da bande opposte di OB per Ipts., saranno ancora da bande opposte di OD: onde $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. — Il resto al Lettore].

P 36 — *Tr.* « Ciascun angolo, i lati del quale facciano con un raggio i n t e r n o « (uscente dal vertice) angoli congrui rispettiv.° ad angoli dati convessi α e β, sarà « s o m m a di questi ».

§ 6.

P a r a l l e l i s m o di rette o piani. O m o t e t i a e t r a s l a z i o n e. Proprietà e costruzione delle s i m i l i t u d i n i. A n t i n v e r s i o n e rispetto a una sfera. Intersezione di due sfere.

P 1 — *Tr.* « Se non esiste alcun punto comune a due date rette giacenti in « un medesimo piano, qualunque retta normale ad una di esse e giacente nel comun

« piano sarà perpendicolare anche all'altra ». [Le due rette che non s'incontrano siano p. es. r, s; e nel loro piano sia data una terza retta p normale ad r. Sulla p esiste per certo un punto — e sia p. es. A — straniero ad ambo le rette r, s; poi che quella è diversa da ognuna di queste (P 5 § 2) e però non la incontra più d'una volta. Dunque i simmetrici del punto A rispetto alle rette r, s sono diversi da A (P 49 § 1): sicchè — posto $A' \equiv A/r$, $A'' \equiv A/s$ — bisognerà che la retta AA' coincida con p (P 7 § 2) e che la AA'' sia normale ad s (P 54 § 1, P 5 § 2): cioè la r perpendicolare alla coppia (A, A') nel suo punto medio, e così la s alla coppia (A', A''). Or, se le rette AA' e AA'' non coincidesser fra loro, esisterebbe nel piano Ar qualche punto equidistante da ognuno degli A, A', A'' (P 12 § 4) e p. cons. comune alle rette r, s (P 11, 15 § 2): contro l'Ipts.] — E di qui — presenti le P 46 § 1 e P 45 § 2 — sarà manifesto che:

P 2 — *Tr.* « Due rette, le quali sian complanari ma non concorrenti, sono « sempre simmetriche l'una dell'altra per equinversione: centro di simmetria il punto « medio fra i piedi d'ogni qualunque perpendicolare comune ».

P 3 — *Tr.* « E, viceversa, due rette simmetriche l'una dell'altra risp.° ad un « punto (e perciò complanari) non si potranno incontrare, se non coincidono ». [In questa Ipts. il centro di simmetria sarà escluso da ognuna delle due rette (P 46 § 1); per la qual cosa, se queste avessero un punto a comune, s'incontrerebber di nuovo nel punto simmetrico: onde avrebber d u e punti a comune l'un l'altro distinti (P 45 § 1): contro P 19 § 1].

P 4 — *Df.* « ' P a r a l l e l a a una retta data ' significa " retta che non incontra « la data, pur giacendo con essa in un piano ". In altri termini: son ' p a r a l l e l e « fra loro ' due rette, allor che giacciono sopra un medesimo piano senza incontrarsi; « n o n parallele quando s'incontrano (potendo anche coincidere), ovvero non giacciono « sopra un medesimo piano. (Dov'è già sottinteso il giudizio che " se una retta è « parallela ad un'altra, questa è, alla sua volta, parallela alla prima "). E — grazie « alle P 2, 3 — potremmo anche dire: P a r a l l e l a a una retta data significa " retta « s i m m e t r i c a alla data rispetto ad un punto, che non le appartiene " ». — Sarà manifesto eziandio (P 45 § 3), che « ogni qualvolta due rette son parallele fra loro, ciascuna di esse è obbligata a giacer tutta quanta d a u n a m e d e s i m a b a n d a dell'altra ».

P 5 — *Tr.* « Se due rette son parallele fra loro, comunque si scelga un punto « sull'una e un punto sull'altra, saranno sempre simmetriche l'una dell'altra rispetto « al centro d'una tal coppia di punti ». [Invero — detti R, S i due punti — l'equinversione rispetto al punto R|S, in quanto rispecchia su sè medesima la perpendicolare tirata da questo punto alle due parallele r, s (P 1, 4, ecc.), e scambia R, S fra loro, dovrà permutare eziandio le r, s (P 6, 9, 11, 45 § 2).]

P 6 — *Tr.* « Essendo dati una retta e un punto fuori di essa, per questo punto « passerà sempre una retta parallela alla data: ma due rette, che ognuna sia paral- « lela alla data, non posson concorrere senza coincidere ». [Sopra la retta data — sia p. es. r — tolgasi un punto A a piacere: il punto dato sia p. es. B. L'equinversione rispetto al punto A|B fa corrispondere ad r una certa retta s, che è parallela ad r (P 3, 4) e passa per B. Nè può darsi che un'altra retta diversa da quella,

ma concorrente in B, sia parallela ad r: perchè, rispetto a quel punto A|B (P 5), una sola è la retta simmetrica della retta data.] — Ne viene che:

P 7 — *Tr.* « Se due rette son parallele fra loro, qualunque retta che ne tagli « una, e giaccia nel comun piano, dovrà tagliare anche l'altra ».

P 8 — *Tr.* « E se due parallele r, s siano tagliate da un'altra coppia di pa- « rallele u, v, il punto medio fra i punti dove le u, v ne incontrano ordinatamente « le r, s, coinciderà col punto medio fra le intersezioni di u, v con s, r ». — Insomma: « Le diagonali d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente per metà; onde i lati e gli angoli opposti saranno congrui fra loro e simmetrici ». Eucl., lib. 1°, prp. XXXIV.

P 9 — *Tr.* « I segmenti che uniscono dalle medesime parti gli estremi di seg- « menti congrui e paralleli fra loro, sono anch'essi congrui e paralleli ». Eucl., lib. 1°, prp. XXXIII. — O, in altri termini: « Se — essendo gli A, B, C, D punti al tutto « diversi fra loro — i segmenti |AC| e |BD| siano congrui l'un l'altro, e di più pa- « ralleli e (salvo A e B) giacenti dalla stessa banda di AB; così anche |CD| sarà « congruo e parallelo ad |AB| ». [Poi che le rette AC e BD son parallele fra loro in Ipts., e C è fuor della AB (P 45 § 3), la retta che passa da questo punto ed è parallela ad AB taglierà BD in un punto (P 4) — sia p. es. E — che dee giacere su |BD (P 43-45 § 3); inoltre la coppia (B, E) sarà congruente ad (A, C) (P 8) e p. c. (B, E) $\simeq$ (B, D) (P 32 § 4). Ma da ciò si deduce che E $=$ D, come notammo altre volte. Ecc., ecc.]

P 10 *Tr.* « Se si prolunga un lato di qualsivoglia triangolo, l'angolo esterno è « uguale alla somma dei due interni opposti. Ved. P 34 § 4 ». Eucl., lib. 1°, prp. XXXII. — In altri termini: " Essendo A, B, C tre punti non collineari e D un punto nell'ombra di B da A (B eccettuato); l'angolo $\hat{B}$.CD equivale alla somma degli angoli $\hat{A}$.BC e $\hat{C}$.AB. Ved. P 29 § 3 e P 34 § 5 ". [Posto M $=$ B|C, E $=$ A/M, l'equinversione rispetto ad M converte l'uno nell'altro i due raggi |CA e |BE, come pure i due raggi |CB e |BC, i segmenti |AB| ed |EC|, e p. cons. anche gli angoli $\hat{C}$.AB e $\hat{B}$.EC (P 47 § 3, ecc.) Al modo stesso — in virtù delle simmetrie rispetto ai punti A|B e B (P 36, 38 § 4) — saranno congrui fra loro anche gli angoli $\hat{A}$.BC e $\hat{B}$.AF (P 5), $\hat{B}$.AF e $\hat{B}$.DE: F essendo un punto arbitrario dell'ombra di B da E, pur che diverso da B. Dunque congrui fra loro anche gli angoli $\hat{A}$.BC e $\hat{B}$.DE. D'altra parte la retta BE, passando fra i punti A e D senza incontrar la CA (P 3), dovrà passar fra C e D (P 13 § 3); e però questi punti C e D giaceranno da bande opposte rispetto a BE; mentre ambo i punti D ed E sono immersi nell'ombra, che BC proietta da A (P 38, 39 § 3). Onde basta appellarsi a P 34 § 5].

P 11 — *Tr.* « Due rette normali a un medesimo piano son parallele fra loro, « se non coincidono. E se due rette son parallele fra loro, qualunque piano perpen- « dicolare ad una di esse è normale anche all'altra ». Eucl., lib. 11°, prp. VI e VIII. [1) Se il piano incontra quelle due rette nei punti R, S, la simmetria rispetto al punto R|S converte in sè stesso il piano, e scambia le due perpendicolari fra loro (P 46 § 1, P 33, 45 § 2). — 2) Se un piano π è normale ad una delle due rette r, s parallele fra loro — p. es. normale alla s nel punto S — allora il piano rs taglia π lungo una retta RS, che incontra r in un certo punto R (P 37 § 2, P 4, 7): e l'equinversione rispetto al punto R|S permuta r con s (P 5) tenendo fermo π. Ecc.]

P 12 — *Tr.* « Due rette parallele ad una medesima retta, che non siano con « questa nel medesimo piano, sono altresì parallele fra loro ». Eucl., lib. 11°, prp. IX. [Perchè un piano perpendicolare ad una qualunque di esse (P 35 § 2) è normale a ciascuna (P 11)].

P 13 — *Tr.* « Due piani diversi perpendicolari sì l'uno che l'altro a una mede« sima retta non si potranno incontrare. E se, viceversa, due piani non hanno alcun « punto a comune, qualunque retta perpendicolare ad uno di essi è normale anche « all'altro ». Cfr. P 1. — [La prima parte è conseguenza immediata delle P 9, 35 § 2; e il resto si prova come P 1, richiamandosi principalmente a P 38 § 2 e P 12 § 4].

P 14 — *Tr.* « Per due piani diversi, il non avere alcun punto a comune, o « l'esser simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad un punto, son condizioni equivalenti ». Cfr. P 2, 3.

P 15 — *Df.* « Due piani son da chiamar '*paralleli fra loro*' quando non « hanno alcun punto a comune: ovver, che è lo stesso (P 14), quando l'uno è sim« metrico all'altro rispetto a qualche punto esterno ». Cfr. P 4. — E però ciascuno di essi è obbligato a giacer tutto quanto da una medesima banda dell'altro (P 46 § 3).

P 16 — *Tr.* « Ogni qualvolta due piani son paralleli fra loro, e siano presi a « piacere un punto sull'uno e un punto sull'altro piano, il centro di questa coppia « di punti sarà un centro di simmetria per quei piani ». Cfr. P 5.

P 17 — *Tr.* « Esiste sempre un piano che passa da un punto dato ed è paral« lelo ad un piano dato, cui non appartenga il punto. Ma due piani, paralleli sì « l'uno che l'altro a un medesimo piano, son paralleli fra loro o coincidono ». Cfr. P 6.

P 18 — *Tr.* « Se due piani son paralleli fra loro, qualunque piano che tagli « uno di essi, taglierà l'altro ancora, e le intersezioni saranno rette parallele. E si« milmente ogni retta, la quale attraversi un de' piani, deve incontrare anche l'altro ». Cfr. P 7. Eucl., lib. 11°, prp. XVI.

P 19 — *Tr.* « Se due rette che s'incontrano sono parallele a due altre rette « che s'incontrano, anche il piano che passa per le prime sarà parallelo al piano delle « altre, se però non coincide con questo ». Eucl., lib. 11°, prp. XV. [Dette r, s le une ed r', s' le altre, la simmetria rispetto al punto medio fra i punti $r.s$ ed $r'.s'$ permuta r con r' ed s con s' (P 5), dunque anche il piano rs col piano $r's'$].

P 20 — *Df.* « Una retta è ' parallela ad un piano ' — e un piano è ' paral« lelo a una retta ' — allorchè nessun punto è comune alla retta ed al piano ». Cfr. P 4, 15. — Dunque una retta sarà parallela ad un piano, se è parallela a qualche retta di questo piano, senza giacere essa stessa nel piano. Ecc., ecc.

P 21 — *Tr.* « Le rette che passan da un punto dato e son parallele a un « medesimo piano sono tutte dalla stessa banda di questo, e giaccion tutte in un « piano ».

P 22 — *Tr.* « Premesso che A, B, C siano punti non collineari e così A', B', C'; « se avvien che le rette AB, BC, CA sian parallele ordinatamente alle rette A'B', « BC', C'A', tutte e tre le congiungenti AA', BB' e CC' concorreranno in un punto, « o saranno parallele fra loro ». [L'Ipts. esclude che possan coincidere i punti A ed

A′, ovvero B e B′, o C e C′; ed implica inoltre, che quelle tre congiungenti siano diverse fra loro (P 19 § 1, P 4). Ora poniamo anzitutto che i piani ABC e A′B′C′ non coincidano. Poi che le rette AA′ e BB′ giacciono insieme sul piano delle parallele AB e A′B′, si taglieranno in un punto, o saranno parallele fra loro (P 2, 4). Ma nell'un caso la CC′ essendo in un piano con AA′ e in un piano con BB′, e non potendo tagliar queste rette in punti diversi, nè incontrare una sola di esse (P 35, 36 § 1, P 4 ecc.), bisognerà che le incontri ambedue nel loro punto comune: e, nell'altro caso, questa medesima argomentazione prova che la CC′ non incontra nessuna delle AA′ e BB′. — Di poi supporremo che i punti A, B, C, A′, B′, C′ siano tutti in un piano: e qui pur si distinguon due casi. In primo luogo le rette AA′ e BB′ potranno tagliarsi in un punto: e sia p. es. O. Fuori del comun piano ABC tolgasi allora un punto S a piacere (P 16 § 2); e sulle SA, SB due punti A″ e B″ diversi l'un l'altro e tali, che la lor congiungente sia parallela ad AB (P 41, 42 § 1; P 4, 6): le parallele tirate da questi punti alle rette AC e BC si taglieranno in un punto (P 17, 21, 12) — sia p. es. C″ — che dee giacer sulla retta SC, per ciò che abbiam detto innanzi. Per la stessa ragione anche le rette A′A″, B′B″ e C′C″ concorreranno in un certo punto T (diverso da S), se per altro non sian tutte e tre parallele fra loro: onde la retta ST nell'un caso — o quella che passa dal punto S, ed è parallela alla A′A″ nell'altro — sarà comune ai tre piani AA′A″, BB′B″, CC′C″, e passerà per O, poi che vi passano i piani AA′A″ e BB′B″. Dunque O è comune ai due piani ABC e CC′C″, e p. cons. appartiene alla retta CC′. Resta che le AA′ e BB′ sian parallele fra loro. In questa ipts. e fuori del comun piano si scelgano i punti A″, B″ e C″ in maniera, che le due rette AA″ e BB″ sian parallele fra loro, e le A″B″, B″C″, C″A″ alle AB, BC, CA rispettivamente: onde, per dimostrato, anche CC″ sarà parallela ad AA″; e così parallele fra loro le rette A′A″, B′B″ e C′C″, dal momento che son paralleli i due piani AA′A″ e BB′B″ (P 19), sicchè le A′A″ e B′B″ non si potranno incontrare. Dunque saranno eziandio paralleli i due piani AA′A″ e CC′C″ (P 19), e parallele per cons. le tracce di questi piani sul piano ABC (P 18), che son le rette AA′ e CC′.]

P 23 — *Tr.* « E, reciprocamente, qualunque volta succede che tutte e tre le « AA′, BB′ e CC′ concorrano in un un medesimo punto, oppur sian tutte e tre pa- « rallele fra loro; se inoltre le AB, BC saranno parallele alle A′B′ e B′C′, bisognerà « che le rimanenti AC ed A′C′ siano anch'esse parallele fra loro ».

P 24 — *Tr.* « In qualsivoglia triangolo, la retta che unisce i punti medî di « due lati, è parallela al terzo lato ». Ovvero: “ Se A, B, C sono punti non colli- « neari, la congiungente i punti A|B e B|C sarà parallela alla retta CA ». [Posto M ≡ A|B, N ≡ B|C, D ≡ C/M, E ≡ M/N; le rette BC, CE, EB sono ordinatamente parallele alle DA, AM, MD (P 4): e poi che inoltre la retta AC è parallela alla retta BD, saranno ambedue parallele alla retta ME, grazie a $\begin{pmatrix} D, M, C, B, E \\ B, C, A', B', C' \end{pmatrix}$ P 22]. — Di qui e dalle P 22, 8 si deduce ad es. che:

P 25 — *Tr.* « Le tre mediane di qualsivoglia triangolo concorron sempre in « un punto ».

P 26 — *Tr.* « Se un punto C, diverso dai punti A e B, dista dal punto medio

« di A e B quanto A, le rette AC e BC saranno perpendicolari fra loro ». Ossia: “ L'angolo inscritto nel semicerchio è retto ”. Eucl., lib. 3°, prp. XXXI. [Per Ipts. i punti A, B, C non collimano (P 8, 43, 44 § 1, ecc.); e la retta che unisce il punto A|B col punto A|C, sarà perpendicolare alla retta CA (P 3-5 § 2) e parallela alla retta BC (P 24); onde basta appellarsi alle P 1, 4].

P 27 — *Tr.* « E viceversa ogni punto L, per cui le rette LA, LB siano in po- « sizione ortogonale (sempre che i punti A, B, L non collimino) giacerà sulla polo- « sfera di A e B. Ved. P 4 § 3 ».

P 28 — *Df.* « Qualunque volta O, A, A′ sian punti collineari e al tutto diversi « fra loro, si chiamerà “ *omotetia* di A in A′, rispetto ad O come *centro* ” — « o, più brevemente, ‘$\left\{O^{A'}_{A}\right\}$’ — la corrispondenza definita mercè le seguenti operazioni » :

1) Al punto O si dia per ‘ imagine ’ O, e al punto A il punto A′. 2) Se B è un punto arbitrario, ma esterno alla retta OA, dicasi ‘ omologo ’ di B quel punto B′, dove la retta OB s'incontra con la parallela tirata dal punto A′ alla congiungente A con B. 3) Se C è un punto diverso da O ed A, ma appartenente ad OA; si osservi anzi tutto che il punto C′, dove questa retta s'incontra con la parallela dal punto B′ alla retta BC, non dipende da B, ma sì veramente dai punti O, A, A′, C, che bastano a determinarlo. Invero, se in luogo del punto B togliamo un punto D a piacere, ma fuor delle rette OA, OB, l'omologo dal punto D — sia p. es. D′ — cadrà come dianzi all'intersezione di OD con A′D′, parallela ad AD; e la retta B′D′ n'escirà parallela a BD, giusta $\begin{pmatrix} B, A, D, B', A', D' \\ A, B, C, A', B', C' \end{pmatrix}$ P 23, e per ugual modo C′D′ parallela a CD, grazie a $\begin{pmatrix} D, D' \\ A, A' \end{pmatrix}$ P 23. Nè diversamente accadrebbe se a far le veci del punto B, o D, si togliesse un punto E qualsivoglia di OB (sol che diverso da O): poi che il fatto delle AD, AE parallele rispettivamente alle A′D′, A′E′ involgerà nella stessa maniera che DE sia parallela a D′E′; e però dall'essere le CD, DE parallele rispettivamente alle C′D′, D′E′ nascerà che la E′C′ è parallela ad EC. Il punto C′, a cui fa capo ciascuna delle costruzioni qui mentovate, è dunque subordinato univocamente a C: e noi lo torremo ad ‘ immagine ’ o ‘ corrispondente ’ di C. — Emerge dalle costruzioni suddette, che l′ ‘ omotetia di A in A′ rispetto ad O ’ è una ‘ trasformazione univoca e reciproca dei punti in punti ’ (come le equinversioni, le rotazioni, ecc.): in quanto che ciascun punto P′ è l'imagine di qualche punto P, e punti diversi hanno sempre diverse immagini. E la trasformazione inversa di un'omotetia qualsivoglia è di nuovo un'omotetia: per es. di $\left\{O^{A'}_{A}\right\}$ l'inversa è precisamente $\left\{O^{A}_{A'}\right\}$ Ecc.

P 29 — *Tr.* « Fermo stanti le Ipts. e le notazioni precedenti, l'omotetia $\left\{O^{A'}_{A}\right\}$ « non si distingue dalle omotetie $\left\{O^{B'}_{B}\right\}$ e $\left\{O^{C'}_{C}\right\}$. Essa non ha ‘ punti uniti ’, dal « centro in fuori; ma rappresenta in sè stess$^{a}_{o}$ ogni retta e ogni piano che passi per

« questo punto. A qualsiasi retta o piano, che non ne contenga il centro, coordina « sempre una retta ed un piano, che è parallel$\left.{}^{a}_{o}\right\}$ a quell$\left.{}^{a}_{o}\right\}$. Se il centro giace fra « i punti A ed A′, allora due punti omologhi quali che siano giacciono sempre da « bande opposte rispetto al centro: se coincide col punto medio di A e A′, l'omotetia « $\left\{O{}^{A'}_{A}\right\}$ si confonde con la simmetria rispetto ad O. Ecc. ».

P 30 — *Tr.* « Qualsivoglia o m o t e t i a è in pari tempo una s i m i l i t u d i n e. « Ved. P 1 § 4 ». [Premessa ancora l'Ipts. di P 28 in ordine ai punti O, A, A′ e posto per brevità $\mathcal{O} \equiv \left\{O{}^{A'}_{A}\right\}$; basterà dimostrare, che se due punti P e Q sono egualmente distanti da un terzo, p. es. da A, e tutti e tre diversi fra loro, anche gli omologhi $\mathcal{O}$P, $\mathcal{O}$Q — vale a dire P′ e Q′ — disteranno egualmente da A′. In primo luogo suppongo i punti A, P, Q per diritto: onde A = P|Q. Allora, presi a piacere fuor della retta PQ due punti simmetrici rispetto ad A — siano questi R, S — e posto R′ ≡ $\mathcal{O}$R, S′ ≡ $\mathcal{O}$S, bisognerà che le rette P′R′ e Q′S′ sian parallele fra loro, come son le PR e QS (P 4); poichè PR sarà parallela alla propria immagine P′R′, seppur non coincide con questa (P 29), e così anche QS rispetto a Q′S′. Per egual modo saranno eziandio parallele fra loro le rette Q′R′ e P′S′. Dunque le rette P′Q′ ed R′S′, corrispondenti a PQ ed RS, si taglieranno scambievolmente nel punto medio fra i punti P′ e Q′ (P 8); e il loro punto comune sarà il punto A′, dal momento che le PQ ed RS si tagliano in A. — Di poi, supposti non collineari A, P, Q, sia π il piano polare alla coppia (P, Q) (P 38 § 2). Questo piano contiene per certo A (ivi), ed è in pari tempo normale alla retta P′Q′, parallela od eguale a PQ (P 13, 15, 29): per la qual cosa anche il piano π', che corrisponde a π, dev'esser normale a P′Q′; visto che i piani π ed $\mathcal{O}\pi$ son paralleli fra loro o coincidono. D'altra parte il piano π' contiene, oltre A′, anche il punto che corrisponde a P|Q; vale a dire — come si è già dimostrato — il punto P′|Q′: dunque la sfera $P'_{A'}$ passerà per Q′ (P 38 § 2)].

P 31 — *Tr.* « D u e distinte s i m i l i t u d i n i, e non più di due, son capaci di « trasformare una terna di punti non collineari A, B, C, tutto che dati ad arbitrio, « in tre punti non collineari A′, B′, C′, dati questi in maniera che gli angoli « $\hat{A}'$. B′C′ e $\hat{B}'$. C′A′ siano c o n g r u i ordinatamente con gli angoli $\hat{A}$. BC e $\hat{B}$. CA. « Ved. P 36 § 4 ». [Per Ipts. esiste un'i s o m e r i a che ai lati |AB ed |AC di $\hat{A}$. BC subordina i lati |A′B′ e |A′C′ di $\hat{A}'$. B′C′ (P 44 § 4); quindi fa corrispondere A′ ad A (P 41 § 4), e rispecchia B e C in due punti B_1 e C_1, che spettano ai raggi |A′B′ e |A′C′, ma son diversi da A′: sia per es. $\mathcal{J}$. Ora gli angoli $\hat{B}'$. A′C′ e $\hat{B}_1$. A′C_1 sono congrui fra loro (P 37 § 4): per la qual cosa — supposto il punto B_1 diverso dal punto B′ — le rette B′C′ e B_1C_1 non si potranno incontrare (P 19 § 5). Dunque l'omotetia $\left\{A'{}^{B'}_{B_1}\right\}$ — che s'indica pur con $\mathcal{O}$ — rappresenta ordinatamente gli A′, B_1, C_1 con gli A′, B′, C′ (P 4, 6, 28). Dunque il prodotto delle similitudini $\mathcal{J}$ ed $\mathcal{O}$ (P 36 § 4, P 30) è una similitudine (P 2 § 4), che trasforma A, B, C rispettiv.^e in A′, B′, C′. — Appresso — posto per brevità $\mathcal{L} \equiv \mathcal{O}\mathcal{J}$, e chiamando $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ gli specchiamenti

nei piani ABC e A'B'C' — sia per. es. $\mathfrak{M}$ una similitudine, che al pari della precedente $\mathcal{L}$ subordini i punti A', B', C' ai punti A, B, C. Dunque la similitudine $\overset{-1}{\mathcal{L}}\mathfrak{M}$ (P 2 § 4) terrà fermo ciascuno dei punti non collineari A, B, C; e per conseguenza $\overset{-1}{\mathcal{L}}\mathfrak{M} = 1$, oppure $\overset{-1}{\mathcal{L}}\mathfrak{M} = \mathcal{S}$ (P 23 § 4): che è quanto dire $\mathfrak{M} = \mathcal{L}$, oppure $\mathfrak{M} = \mathcal{L}\mathcal{S}$. Si conclude, che ogni qualunque similitudine capace di rappresentare A, B, C con A', B', C' si confonde di necessità con $\mathcal{L}$, o con $\mathcal{L}\mathcal{S}$. D'altra parte anche la similitudine $\mathfrak{M}\overset{-1}{\mathcal{L}}$, in quanto non altera i punti A', B', C', si confonde con $\mathcal{S}'$, o con la trasformazione identica: onde $\mathcal{L}\mathcal{S} = \mathcal{S}'\mathcal{L}$. Pertanto le due similitudini capaci ecc., ecc., saranno la precedente $\mathcal{O}\mathcal{J}$ e quella che nasce, ove alla stessa $\mathcal{O}\mathcal{S}$ si faccia preceder lo specchiamento nel piano ABC, o seguire lo specchiamento nel piano A'B'C'. — Abbiamo, è vero, supposto $B_1 \sim = B'$; ma il Tr. sussiste ancorchè questi punti coincidano: essendo allora $\mathfrak{M} = \mathcal{J}$, ovvero $\mathfrak{M} = \mathcal{J}\mathcal{S} = \mathcal{S}'\mathcal{J}$]. Osservate che, se $A = A' = B|B' = C|C'$, avremo appunto $\mathfrak{M} = \mathcal{J}$, ovvero $\mathfrak{M} = \mathcal{S}\mathcal{J}$: dove $\mathcal{J}$ può togliersi eguale ad /A. In questo caso le due similitudini sono l'equinversione rispetto ad A, e il semigiro intorno alla retta perpendicolare in A al piano ABC (come ognun può vedere). — La prps. seguente ha officio di Lemma rispetto al Tr. che viene appresso.

P **32** — *Tr.* « Gli angoli alla base di un triangolo r e t t a n g o l o e i s o s c e l e « sono congrui con gli angoli alla base di qualsivoglia triangolo rettangolo e isoscele ». O, sotto altra forma: « Se, essendo $\left.\begin{matrix} D, E, F \\ A, B, C \end{matrix}\right\}$ tre punti non collineari, la retta $\left.\begin{matrix} D, E \\ A, B \end{matrix}\right\}$ sia normale alla retta $\left.\begin{matrix} DF \\ AC \end{matrix}\right\}$, mentre il punto $\left.\begin{matrix} F \\ C \end{matrix}\right\}$ dista da $\left.\begin{matrix} D \\ A \end{matrix}\right\}$ quanto $\left.\begin{matrix} E \\ B \end{matrix}\right\}$; si dimostra, che gli angoli $\hat{B}$. AC, $\hat{E}$. DF sono congrui fra loro ». [Presi i punti $M \equiv B|C$, $N \equiv E|F$, $P \equiv A/M$, $Q \equiv D/N$, le rette BP, EQ n'esciranno parallele alle rette AC e DF (P 4) e perpendicolari alle AB, DE (P 1, 3); inoltre BC sarà perpendicolare ad AM (P 5 § 2): premesso che il punto M è diverso da A, e i punti P e Q son diversi da B ed E. Per certo esiste un'isomeria che traduce E in B, il raggio E v e r s o D sul raggio B v e r s o A e il semipiano ED v e r s o F sul semipiano BA v e r s o C (P 39 § 4): dunque il raggio |EQ sul raggio |BP — a motivo di P 11 § 2, P 3, 36 § 4, e visto che i punti P e Q giaceranno negli angoli $\hat{A}$. BC e $\hat{D}$. EF, e per cons. nei semipiani |(AB)C e |(DE)F (P 47, 49 § 3) — e i punti D e Q in due punti D' e Q' egualmente distanti da B, sui raggi |BA e |BP. Ora, per simmetria rispetto alla retta BC si scambian fra loro A e P, come pure |BA e |BP, mentre la sfera D'_B si converte in sè stessa (P 50 § 1): onde il punto Q', dove questa è tagliata dal raggio |BP (P 37 § 3), sarà il punto che corrisponde a D'. Ne viene che il punto D'|Q' — ossia l'immagine del punto N in virtù dell'isomeria precedente — appartiene al raggio |BC (P 54 § 1, ecc.): e che pertanto quell'isomeria porta il raggio |EF sul raggio |BC e l'angolo $\hat{E}$. DF a coincider coll'angolo $\hat{B}$. AC (P 48 § 3).]

P **33** — *Tr.* « Qualsivoglia similitudine, se già non è i s o m e r i a, sarà equi« valente al prodotto di un'i s o m e r i a preceduta o (come più aggrada) seguita da « un'o m o t e t i a ». [Invero, data una similitudine $\mathfrak{M}$ ad arbitrio, e presi i punti

non collineari A, B, C sotto condizione che AC sia perpendicolare ad AB e C disti da A quanto B, com'è sempre possibile (P 25 § 1, P 14, 20 § 2); questi punti saranno da $\mathfrak{M}$ convertiti in A', B', C' eziandio non collineari, per modo che $A'C' \perp A'B'$ e $C' \varepsilon B'_{A'}$ (P 1, 3 § 4): la qual cosa farà che gli angoli $\hat{B}.AC$, $\hat{B}'.A'C'$ siano congrui fra loro (P 32). Analogamente $\hat{C}.AB \asymp \hat{C}'.A'B'$. Ma di qui si deduce, grazie a P 31 e supposto che la figura (A, B, C) non sia congruente ad (A', B', C'):

$$\mathfrak{M} = \mathcal{O}\mathfrak{J}, \quad \text{oppure} \quad \mathfrak{M} = \mathcal{O}\mathfrak{J}\mathcal{S},$$

le $\mathcal{O}, \mathfrak{J}, \mathcal{S}$ avendo il medesimo significato che in P 31; laddove, se $(A, B, C) \asymp$ $\asymp (A', B', C')$, si deduce:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{J}, \quad \text{oppure} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{J}\mathcal{S};$$

cosicchè, se la data similitudine $\mathfrak{M}$ non è isomeria, sarà certamente il prodotto di un'isomeria *susseguita* da un'omotetia (P 37, 38 § 4). D'altra parte il prodotto $\overset{-1}{\mathfrak{J}}\mathcal{O}\mathfrak{J}$ ha i caratteri dell'omotetia (P 28) come ognun può vedere; anzi eguaglia precisamente $\left\{ A^{B''}_{B} \right\}$, se B'' denoti il punto $\overset{-1}{\mathfrak{J}}B'$: e il simile potrebbe dirsi di $\overset{-1}{(\mathfrak{J}\mathcal{S})}\mathcal{O}\mathfrak{J}\mathcal{S}$. Perciò, dopo aver posto $\mathcal{O}_1 \equiv \overset{-1}{\mathfrak{J}}\mathcal{O}\mathfrak{J}$, onde $\mathfrak{J}\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}\mathfrak{J}$, sarà vero altresì che $\mathfrak{M}$ equivale al prodotto di un'isomeria *preceduta* da un'omotetia; se per altro non si confonde con $\mathfrak{J}$ o con $\mathfrak{J}\mathcal{S}$. Ecc. — Osservate che l'isomeria non esclude la trasformazione *identica* (P 37 § 4)].

P 34 — *Tr.* « La similitudine è trasformazione *ortomorfa*: ossia converte qua- « lunque angolo dato in un altro, che è *congruente* al primo ». [Basta per quanto precede (P 36 § 4 e P 33) accertare, che il fatto è vero nell'*omotetia*. Si osservi che l'omotetia coordina sempre a qualunque *raggio* o segmento un raggio o un segmento, e a ciascun *angolo* piano convesso un angolo piano convesso (P 30, ecc.). Ora se p. es |ABC| e |A'B'C'| siano triangoli omotetici, i due raggi corrispondenti |AB ed |A'B' — e nel modo stesso anche i raggi |AC ed |A'C' — oltre che paralleli fra loro (P 28), saranno da una stessa banda o da bande opposte della congiungente AA' (a parte il caso, che A' ed A si confondano), secondo che due punti omologhi quali che siano, pur che diversi l'un l'altro — p. es. gli A ed A' — giaceranno dalla stessa banda o da bande opposte del centro d'omotetia (P 38, 45 § 3; P 29). Ne viene che questi raggi (e p. cons. anche gli angoli $\hat{A}.BC$ e $A'.B'C'$), son simmetrici l'uno dell'altro rispetto al punto A|A'; oppur l'uno e l'altro simmetrici d'uno stesso angolo, rispetto ai punti A ed A|A': e però sempre congrui fra loro. Ecc.].

P 35 — *Df.* « Ogniqualvolta A e A' sian punti, pur che diversi fra loro, il « nome di "*traslazione* (od *equipollenza*) di A in A'" — simboleggiato « talvolta in $\left\{ {A' \atop A} \right\}$ — è per significare la corrispondenza definita mercè le condizioni « che seguono ». 1) Al punto A si dia per immagine A'; e, se B è un punto arbitrario fuor della retta che unisce A con A', dicasi '*omologo*' o '*trasformato*' di B quel punto B', dove la parallela a codesta retta da B s'incontra con la parallela da A' alla congiungente A con B (P 6, 7). 2) E se C è un punto, che

stia nella retta AA′ senza coincider con A; visto che dalla P 23 — mercè lo stesso ragionamento, pur non ha guari allegato a P 28 — risulta che il punto C′, dove questa retta s'incontra con la parallela tirata dal punto B′ alla retta BC, non dipende da B, ma sì veramente dagli A, A′, C: in maniera che, tolto invece di B un qualsiasi punto D fuor dalle rette AA′ e BB′, o un qualsiasi punto E sopra la BB′, risulterà sempre D′C′ parallela a DC, ed E′C′ parallela ad EC: allora un tal punto C′ si dia per omologo a C. — Emerge dalle costruzioni suddette, che ciascun punto P′ (tutto che dato ad arbitrio) è l'immagine di un qualche punto P; ma, finchè i punti P e Q son diversi, per nessun modo coincideranno le imagini P′ e Q′: insomma la ' traslazione di A in A′ ' è una ' trasformazione invertibile dei punti in punti ' (come le omotetie) ed ha per inversa la ' traslazione di A′ in A '. Ecc. (1).

P 36 — *Tr.* « Ferme stanti le Ipts. e le notazioni di P 35; la traslazione
« $\left\{\begin{matrix} A' \\ A \end{matrix}\right\}$ non si distingue dalle traslazioni $\left\{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}\right\}$ e $\left\{\begin{matrix} C' \\ C \end{matrix}\right\}$. Essa non ha punti uniti, ma
« rappresenta in sè stessa ogni retta che sia la AA′ o parallela ad AA′; e in sè
« stesso ogni piano che passi per AA′, o sia parallelo a questa retta. Ad una retta,
« che non sia la AA′ nè parallela ad AA′, coordina sempre una retta parallela alla
« prima; e così ad ogni piano, che non contenga la AA′, nè sia parallelo a questa
« retta, fa corrispondere un piano parallelo a quello. Ecc. ». Cfr. P 29.

P 37 — *Tr.* « E, dato un punto A″ diverso dagli A, A′, la risultante o prodotto
« delle traslazioni $\left\{\begin{matrix} A' \\ A \end{matrix}\right\}$ e $\left\{\begin{matrix} A'' \\ A' \end{matrix}\right\}$ è una nuova traslazione $\left\{\begin{matrix} A'' \\ A \end{matrix}\right\}$ indipendente dall'ordine
« dei due fattori ».

P 38 — *Tr.* « Qualsivoglia traslazione è in pari tempo un'isomeria ». Cfr. P 30. [Che ' traslazione ' involga ' similitudine ' (in quanto le rette omologhe son parallele fra loro o coincidono) è già stabilito implicitamente nel raziocinio, da cui risulta P 30. Allora — grazie a P 35, 36 § 4 — basta notar questo fatto: coppie di punti omologhe per traslazione, le quali non sian per diritto, son sempre congrue fra loro: che è conseguenza immediata di P 23, 8.]

P 39 — *Tr.* « Sempre che gli A, A′ sian punti distinti, la traslazione di A in
« A′ sostituisce ad A′ il punto simmetrico di A rispetto al medesimo A′ ». Cfr. P 27 § 4. [Invero — posto A″ ≡ A/A′ — la traslazione di A in A′ dovrà convertire la coppia (A, A′) nella (A′, A″), oppur nella (A′, A); dal momento che $\left\{\begin{matrix} A' \\ A \end{matrix}\right\}$ è un'isomeria (P 38) per la quale AA′ è tautologa (P 36), e che su questa retta i punti A″ ed A, ed essi soltanto, distan da A′ quanto A. Ma se A′ fosse restituito in A, la traslazione convertirebbe in sè stesso il punto A|A′ (P 3, 36 § 4); contro P 36].

(1) A questa dfn. dell'equipollenza si potrà liberamente sostituire (con qualche vantaggio, almeno per certi rispetti) l'altra più semplice: " traslazione di A in A′ " ≡ " prodotto dell'equinversione rispetto ad A per l'equinversione rispetto al punto medio di (A, A′) ": d'onde le proprietà segnalate in P 35-39 conseguiranno del pari, attraverso i principi del parallelismo.

P 40 — *Df.* « ω essendo una sfera arbitraria non condensata in un punto, ed « O il centro di quella; per ciascun punto A, sol che diverso da O, conducasi la « retta AO, quindi s'innalzi dal punto O una retta perpendicolare ad AO (P 15 § 1, « P 14 § 2); e sia P un de' punti, ove questa retta s'incontra con quella sfera « (P 20 § 2). Si può coordinare ad A quel punto — sia p. es. A' — dove la retta « AO s'incontra con la normale elevata in P alla congiungente A con P nel piano « APO (P 9 § 2, P 1, ecc.): visto che un tal punto A' è individuato per mezzo di A « ed ω, ossia non dipende da P. [Invero, qualunque altro semidiametro |OQ| della « sfera, pur che normale ad AO, si può sovrapporre ad |OP| mercè d'una rotazione « intorno ad AO, che traduce le rette QA, QA' rispettivamente in PA, PA' (P 11, « 23, 27 § 2)]. Nasce in questa maniera una certa trasformazione reciproca e « involutoria dei punti diversi da O in punti diversi da O, cui spetta il nome « di '*antiinversione* rispetto ad ω'; O è il 'centro' dell'antinversione, ω ne è « la 'sfera fondamentale' ». — Il prodotto di codesta trasformazione per l'equinversione /O è la così detta '*inversione* (positiva) rispetto ad ω': onde l''inverso' di A rispetto ad ω è precisamente il simmetrico del punto A' rispetto ad O. E i piani perpendicolari alla retta AO nei punti inverso e antinverso di A saranno il piano *polare* e l'*antipolare* di A rispetto ad ω. Ecc. — Emerge ipso facto dalla costruzione suddetta, che: « Per mezzo di un'antinversione arbitraria, qualunque retta o piano che ne contenga il centro si rappresenta punto per punto in sè stessa) (fatta astrazione dal centro, che non ha immagine alcuna); e così anche la sfera fondamentale, di cui sono omologhi i punti diametralmente opposti: mentre ogni cerchio o sfera, il cui centro è lo stesso centro d'antinversione, avrà per immagine un cerchio o una sfera, eziandio centrati in quel punto. Ecc. ».

P 41 — *Tr.* « Dati ω ed O come sopra; a qualsiasi piano, o retta, non con- « tenente O, sta di fronte, come figura antinversa, una sfera od un cerchio, che « passa sempre per O (ma da cui questo punto si deve intendere escluso): e reci- « procamente. E qualunque cerchio o sfera in cui giaccian due punti omologhi, sarà « figura antinversa di sè medesima ». [Sian per es. η un piano arbitrario che non contiene O; E il piede della normale abbassata da questo punto a quel piano; A un punto dato a piacere in η, pur che diverso da E. Si costruiscan gli omologhi E' ed A' dei punti E ed A mercè il semidiametro OP della sfera fondamentale (P 40), supposto normale ad ambo le rette OE, OA (P 18, 28 § 2): onde E'E ⊥ AE (P 18 § 2), AE ⊥ PE (P 53, 54, 18 § 2), PE ⊥ PE'; e per cons. PE' ⊥ PAE (P 25 § 2). Dunque PE' ⊥ PA: sicchè il piano perpendicolare in P alla retta PA passerà sempre da E' (P 35 § 2) qualunque sia il punto A (pur che giacente in η). Ma un tal piano deve tagliare nel punto A', antinverso di A, la congiungente A con O (P 35 § 2 e P 40): dunque A' è comune a due rette uscenti rispettivamente da O ed E' e di più perpendicolari fra loro; atteso che il piano OPA, normale ai due piani OAE, PA'E' (in quanto OP è normale ad ambo le rette OA, OE, e così PA alle rette PA' e PE') sarà eziandio perpendicolare alla comune intersezione di questi (P 55 § 2), che è precisamente la A'E' — d'onde A'E' ⊥ OA. Dunque il luogo di A', ossia la figura antinversa del piano η, non è altro che la polosfera dei punti O, E' (P 27).

Dimostri il Lettore che, viceversa, ogni sfera passante per O si dee trasformare in un piano. Pertanto qualunque retta r, che non contenga O, ha per immagine un cerchio, il quale contiene O; cioè l'intersezione del piano tautologo Or (P 40) con una sfera η' corrispondente ad un piano η che passi per r (P 3 § 3, ecc.): e reciprocamente. — Ora si osservi, che i tre punti P, A, A' equidistano dal punto medio di A, A' (P 27) e però la normale innalzata per A|A' al piano PAA' — la quale è obbligata a giacere sul piano OAE (P 54, 51 § 2) — sarà il luogo dei centri di tutte le sfere, che passan per quei tre punti (P 38, 37, 52, 54, 55 § 2). D'altra parte una sfera sì fatta deve tagliar ciascun piano, il quale contenga OP, lungo un cerchio autosimmetrico rispetto al piano OAE (P 32, 56 § 2); dunque avente su questo piano il centro e due punti diametralmente opposti (P 31, 21 § 2, ecc.), che saranno per conseguenza l'uno antinverso dell'altro (P 26, 40). Ne viene che un cerchio di questo piano OAE, sol che passi per ambo i punti A, A', sarà necessariamente antinverso di sè medesimo; in quanto vi sarà sempre una sfera che lo contenga, passando inoltre per P. (Si lascia al Lettor di provare, che per un cerchio ed un punto esterno al suo piano — come per due cerchi segantisi in punti diversi, senza giacere in un medesimo piano — passa sempre una sfera determinata ed unica). Dunque l'antinversione dee convertire in sè stesso ogni cerchio — e quindi anche ogni sfera — che passi per due punti omologhi, quali che siano.] — In questa e nella seguente proposizione si stabiliscono sommariamente le proprietà cardinali dell'antinversione piana e solida — quindi anche i fatti dell'inversione positiva (P 40) e, se vogliamo, anche quelli che si riferiscono a polarità ed antipolarità rispetto a cerchi o sfere — per via di semplici considerazioni stereometriche; e senza ricorrere (come i più fanno) alla dottrina delle proporzioni e dei triangoli simili, o dell'equivalenza [1].

P 42 — *Tr.* « E a qualunque cerchio o sfera, che non contenga O, l'antinversione rispetto ad ω coordina sempre un cerchio, o una sfera ». [Ritenendo le ipts. e le notazioni precedenti, qualunque cerchio c del piano η sarà trasformato nel cerchio comune alla sfera η' e alla sfera che, oltre a passare per c, contiene il punto antinverso d'un punto arbitrario di c (P 1 § 3, P 41, ecc.). — Di poi, se ξ è una sfera, la quale non passi per O; e siano A e B due punti scelti a piacer su di essa, non però allineati con O; indi c e d siano le sezioni prodotte in ξ da due piani (l'un l'altro distinti), ciascuno dei quali contenga ambo i punti A e B senza passare per O: allora i due cerchi c' e d', che corrispondono a quelli (P 41), si taglieranno nei punti A' e B', giacendo per conseguenza in una medesima sfera $c'd'$. Questa sarà la figura antinversa di ξ. Invero, se X è un punto arbitrario di ξ che non appartenga a c, nè a d, nè ad OA; ciascun piano η, il quale contenga ambo i punti A ed X, senza passare per O, nè per B, nè per alcuna delle due rette tangenti in A i due cerchi c e d (P 40 § 1, P 8, 14 § 2) — piano, che fuor di dubbio esiste, come il Lettor può vedere — taglierà necessariamente gli stessi cerchi in due nuovi punti Y e Z, diversi l'uno dall'altro e da X (P 10, 11 § 2, ecc.) e la sfera data ξ in un

[1] Una 'teoria geometrica dell'inversione' che non si appella nè a proporzioni, nè ad equivalenza, fu già proposta da G. Lazzeri nel Periodico di Matem., v. II, (a. 1900).

cerchio XYZ (P 3 § 3), sul quale giacciono i punti A, X, Y, Z, al tutto diversi fra loro. Ma già si sa che a un tal cerchio dee corrispondere un cerchio X'Y'Z'; il quale, incontrando la sfera $c'd'$ in tre punti diversi A', Y' e Z', sarà obbligato a giacer su di essa (P 12 § 2, ecc.): onde anche X' appartiene a $c'd'$; ecc., ecc. — Dopo ciò si può esser sicuri che un cerchio, il quale non passi per O, si trasforma sempre in un cerchio, ancorchè vi passi il suo piano: però che un tal cerchio è l'intersezione di questo piano con una sfera che non contiene O. Ecc.] — La prps. seguente si appella a P 41, ma non a P 42.

P 43 — *Tr.* « Nel supposto che A, B siano punti diversi fra loro, ed E, F « punti di AB l'uno interno e l'altro esterno ad |AB|, si dimostra qualmente le « polosfere di (A, B) ed (E, F) s'incontrano ». Cfr. P 11 § 5. [Si può conceder che il punto F stia sul prolungamento di |AB| oltre A. Proveremo, che s'incontrano necessariamente i due cerchi, tracciati su quelle sfere da un piano π, il quale contenga AB. Perciò — detto P un de' punti, dove la normale innalzata da E alla AB nel piano π incontra la polosfera di A, B (P 11 § 3) — si consideri l'antinversione rispetto alla sfera P_E (P 40): mercè la quale quale A si cambia con B (P 26, 40) e il cerchio (A, B) si converte in sè stesso (P 41); mentre che l'altro cerchio (E, F) si muta in retta del piano π (P 41) e precisamente nella normale f' elevata ad AB dal punto F', che corrisponde ad F. Il Tr. sarà dimostrato, se proveremo che questo punto F' cade fra i punti A e B: però che allora il cerchio tautologo (A, B), tagliando due volte f' (P 11 § 3) dovrà tagliare eziandio la figura antinversa, ossia l'altro cerchio (E, F), in punti diversi. Ora — se C è un punto nell'ombra di P da B (non importa quale, pur che diverso da P) — è forza che l'ombra di A da B si produca nel semipiano ' PA verso C ' (P 29, 39 § 3), e al tempo stesso nel semipiano ' PC verso A ', che contiene il raggio |BA per intero (P 43 § 3): dunque tutta entro l'angolo $\hat{P}$. AC (P 47, 49 § 3). Ne viene che il punto F' (straniero ad ambo le rette PA, PC) non può stare nell'ombra di A da B: perchè, se vi stesse, l'angolo retto $\hat{P}$. GG' sarebbe minore dell'angolo retto $\hat{P}$. AC (P 49 § 3; P 12, 16 § 5; P 40), contro le P 40 § 4 e P 15 § 5. Ma se il medesimo punto F' cadesse nell'ombra di B da A, sarebbe escluso dall'intervallo |BF|, ch'è tutto quanto in |BA (P 35, 29, 30 § 3); e al tempo stesso F escluso dall'intervallo |BF'| (ivi): onde B cadrebbe tra F ed F' (P 15 § 3) e per cons. $\hat{P}$. BF $<$ $\hat{P}$. FF' (P 47 § 3, P 12 § 5); mentre dall'essere A interno a |BF| si deduce (ivi) $\hat{P}$. AB $<$ $<$ $\hat{P}$. BF. Insomma l'angolo retto $\hat{P}$. AB n'escirebbe minore dell'angolo retto $\hat{P}$. FF'. Si conclude che il punto F' è in |AB| (P 30 § 3).] — Sopra un ragionamento consimile (ma un po' più breve) si può fondar la seguente:

P 44 — *Tr.* « E se viceversa — essendo A, B, E, F quattro punti non colli- « neari — le polosfere di (A, B) e di (E, F) s'incontrano in punti diversi; allora « un de' punti E, F sarà interno ad |AB|, l'altro esterno ».

§ VII.

Prodotti di isomerie. Congruenze e anticongruenze. Antirotazioni e antitraslazioni. Elicomozioni. Classificazione delle isomerie.

P 1 — *Tr.* « La risultante o prodotto di più rotazioni intorno al medesimo « asse non può esser che rotazione intorno a quest'asse, o trasformazione identica ». [Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ due rotazioni arbitrarie intorno alla retta r; sicchè ciascun punto di r sarà convertito in sè stesso dall'isomeria $\mathcal{Q}\mathcal{S}$. Or se questa ammettesse un punto tautologo A esterno alla r, onde $\mathcal{Q}(\mathcal{S}A) = A$: allora — detto α il piano Ar e μ il piano perpendicolare alla coppia (A , $\mathcal{S}$A) nel suo punto medio — ne verrebbe $\mathcal{S} = /\mu . /\alpha$ e $\mathcal{Q} = /\alpha . /\mu$ (P 25, 26 § 4) e per cons. $\mathcal{Q}\mathcal{S} = 1$: onde il Tr. consegue da P 30, 8 § 4].

P 2 — *Tr.* « Qualsivoglia rotazione è sempre il q u a d r a t o di un'altra rota- « zione intorno al medesimo asse ». [Essendo r l'asse d'una rotazione arbitraria $\mathfrak{R}$, A un punto esterno a quest'asse ed $A' = \mathfrak{R}A$; conducasi il piano π normale alla coppia (A , A') nel suo punto medio: piano che passa sempre per r, giusta le P 23 38 § 2. Esiste per certo una rotazione intorno ad r — e sia per es. $\mathcal{S}$ — atta a subordinare ad A un certo punto B di π, non importa quale (P 27 § 2): e una rotazione siffatta dovrà condurre B nel punto A/π (P 27 § 4), vale a dire in A'. Pertanto la rotazione $\mathcal{S} . \mathcal{S}$ (P 1) ossia $\mathcal{S}^2$ farà corrispondere A' ad A, come la data $\mathfrak{R}$: dunque $\mathcal{S}^2 = \mathfrak{R}$ (P 28 § 4)].

P 3 — *Tr.* « Il prodotto di due rotazioni arbitrarie intorno a rette diverse, ma « concorrenti in un punto, è una rotazione intorno a qualche altra retta uscente dal « punto comune a quegli assi ». [Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ le due rotazioni, u e v i loro assi. Se nel piano π di questi assi tagliamo i punti A e B ad arbitrio, pur che esterni rispettivamente alle u e v: onde $\overset{-1}{\mathcal{S}}A \sim= A$ e $\mathcal{Q}B \sim= B$ (P 8 § 4): allora, detti α e β i piani polari (P 38 § 2) alle coppie (A , $\overset{-1}{\mathcal{S}}$A) , (B , $\mathcal{Q}$B) — piani che passan rispettivamente per le u , v (P 23 § 2) — si sa che $\mathcal{S} = /\pi . /\alpha$ (P 26 § 4) e $\mathcal{Q} = /\beta . /\pi$ (P 25 § 4: per la qual cosa $\mathcal{Q}\mathcal{S} = /\beta . /\alpha$. Ora i piani α e β non posson coincidere: perchè l'uno contiene u ma non A, l'altro v ma non B; mentre il piano uv contiene ambedue questi punti: e d'altra parte s'incontran lungo una retta, poi che passan dal punto comune alle u , v. Onde basta appellarsi a P 4 § 4.]

P 4 — *Tr.* « Il prodotto d'una rotazione arbitraria per lo specchiamento ad « un piano, che ne contenga l'asse, equivale allo specchiamento in un altro piano, « eziandio passante per l'asse ». [Le date trasformazioni sian p. es $\mathfrak{R}$, δ; r sia l'asse di rotazione e σ il piano di simmetria. Un punto A scelto a piacere in σ, ma fuor di r, verrà trasferito ad es. in A' da $\mathfrak{R}$ e in A_1 da $\overset{-1}{\mathfrak{R}}$; e questi punti A' e A_1 saranno diversi da A (P 22 § 2, P 8 § 4). Ora indicando con δ_1 e δ i piani po-

lari alle coppie (A_1, A) e (A, A') — piani che passan per r (P 23 § 2, ecc.) — avremo in un tempo, grazie alle P 25, 26 § 4: $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} . /\delta_1$ ed $\mathfrak{R} = /\delta . \mathfrak{S}$: ond $\mathfrak{S}\mathfrak{R} = /\delta_1$ ed $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = /\delta$].

P 5 — *Tr.* « Il prodotto delle simmetrie rispetto a due piani paralleli fra loro « è una traslazione normale a quei piani ». Cfr. P 4 § 4. [Detti μ e ν quei due piani, siano A, B, C tre punti non collineari di μ, e A', B', C' i lor simmetrici rispetto a ν: onde il piano A'B'C' sarà parallelo a μ (P 42, 31 § 2, P 15 § 6), le rette BB' e CC' parallele alla retta AA' (P 11 § 6, ecc.) e le A'B', A'C' parallele alle AB, AC (P 4, 18 § 6). Ne viene che la traslazione di A in A' subordina i punti A', B' e C' ai punti A, B, C (P 35 § 6), al pari dell'isomeria $/\nu . /\mu$: per la qual cosa — posto $\mathfrak{T} = \left\{ {A' \atop A} \right\}$ — la trasformazione $\overset{-1}{\mathfrak{T}} . /\nu . /\mu$ equivale necessariamente a $/\mu$, ovvero all' identità (P 35, 38 § 6). Ma il primo evento farebb'essere $\mathfrak{T}$ uguale a $/\nu$: assurdo (P 36 § 6, P 31 § 2). Dunque resta che $\overset{-1}{\mathfrak{T}} . /\nu . /\mu = 1$, vale a dire $/\nu . /\mu = \mathfrak{T}$.] — Osservate che da $/\nu . /\mu = \mathfrak{T}$ si deduce $/\nu = \mathfrak{T} . /\mu$ e $/\mu = /\nu . \mathfrak{T}$; e di qui facilmente si trae che:

P 6 — *Tr.* « La risultante d'uno specchiamento, al quale preceda o segua una « traslazione normale al piano specchiante, è ancora uno specchiamento: e il nuovo « piano di simmetria sarà parallelo al primo ».

P 7 — *Tr.* « La risultante di due rotazioni, eseguite intorno a due rette pa- « rallele fra loro è, in ogni caso, una rotazione o una traslazione ». Cfr. P 3. [Si posson qui riprodurre senz'altro le argomentazioni recate a provar la P 3, fino a concluder che $\mathfrak{Q}\mathcal{S} = /\beta . /\alpha$, e che i piani α e β non posson coincidere (ivi). Ora — secondo che questi piani si taglieranno lungo una retta, o saranno paralleli fra loro — il prodotto $/\beta . /\alpha$ sarà una rotazione (P 4 § 4) o una traslazione (P 5).]

P 8 — *Tr.* « Componendo, nell'ordine che più ci piace, una rotazione arbitraria « con qualsivoglia traslazione normale all'asse di quella, si ottiene per risultante « una rotazione intorno ad un asse, che è parallelo al primo ». [Nelle ipts. di P 7, tolgasi un punto a piacere sull'asse u di $\mathcal{S}$ — sia p. es. B — e dicasi ancora B' il punto $\mathfrak{Q}$B. Se i piani α e β son paralleli fra loro, il prodotto $\mathfrak{Q}\mathcal{S}$ equivale a $\left\{ {B' \atop B} \right\}$ (ivi e P 36 § 6): per la qual cosa $\mathfrak{Q} = \left\{ {B' \atop B} \right\} . \overset{-1}{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{S} = \overset{-1}{\mathfrak{Q}} . \left\{ {B' \atop B} \right\}$. Ma (come ognun può vedere) date ad arbitrio una rotazione $\overset{-1}{\mathcal{S}}$ intorno ad u e una traslazione $\left\{ {B' \atop B} \right\}$ normale ad u, si può sempre assegnare una retta v parallela ad u e una rotazione $\mathfrak{Q}$ intorno a v, per modo che $\mathfrak{Q}\mathcal{S}$ risulti uguale a $\left\{ {B' \atop B} \right\}$: ecc., ecc.].

P 9 — *Df.* « Si dà il nome d' '**antirotazione**' all'isomeria che risulta da « una rotazione arbitraria, seguita dallo specchiamento in un piano perpendicolare « all'asse ». — Due operazioni sì fatte — sia p. es. $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{S}$ — son permutabili l'una con l'altra, vale a dire $\mathfrak{S}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ [Veda il Lettore]. Per la qual cosa '*antirotazione*' si definisce altresì come "prodotto di specchiamento per rotazione intorno ad un asse normale al piano specchiante". — Osservate che — detti r l'asse

di $\mathfrak{R}$ e σ il piano di δ — l'antirotazione $\delta\mathfrak{R}$, o $\mathfrak{R}\delta$, dee convertire il punto $r\sigma$ in sè stesso (P 23, 31 § 2); ma non può ammettere alcun altro punto tautologo [Veda il Lettore]. — Se $\mathfrak{R}$ sarà un semigiro (P 7 § 4) intorno ad r, l'antirotazione $\delta\mathfrak{R}$ sarà tutt'uno con l'equinversione rispetto al punto $r\sigma$ [Detto O questo punto, la similitudine $/O\,.\,/\sigma$ — in quanto tien fermo ogni singolo punto di r, oltre che ciascun piano il quale contenga r, ma sposta i punti di σ — è necessariam.^e^ un semigiro (P 30, 23, 10 § 4): poi che si distingue così dall'identità, come ancora dallo specchiamento in un piano passante per r (P 56 § 2). Dunque $/O\,.\,/\sigma = /r$, e per cons. $/O = /r\,.\,/\sigma$].

P 10 — *Tr.* « Qualunque isomeria che possieda un sol punto unito è un'an« tirotazione ». [Anzitutto si osservi, che il prodotto dello specchiamento ad un piano arbitrario per il semigiro intorno ad un asse, che incontri il piano in un punto senza giacervi, eguaglia sempre un'antirotazione (che ha l'asse in quel piano). Cfr. P 4. Invero, se il piano, l'asse ed il punto onde si parla sian per es. π, s ed O; e σ denoti un piano passante per s e normale a π (P 54 § 2), r la perpendicolare a σ in O, τ il piano τs (certamente diverso da π): avremo, grazie a P 6 § 4: $/s\,.\,/\pi = (/\sigma\,.\,/\tau)\,.\,/\pi$. D'altra parte l'operazione composta $/\tau\,.\,/\pi$ equivale ad una certa rotazione $\mathfrak{R}$ intorno alla retta r (P 4 § 4): onde $/s\,.\,/\pi = /\sigma\,.\,\mathfrak{R}$; ecc. — Ciò premesso (e ritenendo qualcuna delle notazioni suddette) denoti p. es. $\mathfrak{J}$ un'isomeria, che ammette un sol punto tautologo; e questo sia p. es. O. Preso un punto A a piacere, pur che diverso da O, e posto $A' \equiv \mathfrak{J}A$, $M \equiv A|A'$; si chiami s la retta OM, oppure una retta perpendicolare in O alla congiungente AA′, secondo che M è diverso da O, oppur si confonde con O (la qual cosa avviene ogni volta che gli A, A′ sian per diretto con O): onde A ed A′ simmetrici rispetto ad s (P 36 § 4, P 54 § 1, P 5 § 2, ecc.). Ora il prodotto $/s\,.\,\mathfrak{J}$, in quanto converte in sè stesso ciascuno dei punti O ed A, non può esser che l'identità, o lo specchiamento ad un certo piano π che passa per quei due punti, o una qualche rotazione $\mathfrak{S}$ intorno alla retta OA (P 22-24, 30 § 4). Se non che il primo di questi eventi addurrebbe senz'altro $\mathfrak{J} = /s$, e il terzo $\mathfrak{J} = /s\,.\,\mathfrak{S}$: onde $\mathfrak{J}$ sarebbe una rotazione (P 7 § 4, P 3) contro l'Ipts. (P 23 § 2). Resta il secondo caso, nel quale $\mathfrak{J} = /s\,.\,/\pi$. Allora — grazie all'osservazione precedente — $\mathfrak{J}$ è un'antirotazione, se per altro la s non giacerà su π: ma il supporla in π farebb'essere tautologo, secondo $\mathfrak{J}$, ogni punto di quella retta (P 4); contro l'Ipts.]. — Pertanto:

P 11 — *Tr.* « Le isomerie dotate di punti uniti sono l'identità, la sim« metria rispetto ad un piano, la rotazione, l'antirotazione — e queste « soltanto ». — Inoltre:

P 12 — *Tr.* La risultante d'una rotazione arbitraria, preceduta o seguita dallo « specchiamento ad un piano che ne incontri l'asse in un punto (senza passare per « questo) è sempre un'antirotazione ». [Sian p. es. $\mathfrak{R}$ la rotazione onde si parla, r il suo asse, π il piano specchiante, ed O il punto $r\pi$. L'isomeria $/\pi\,.\,\mathfrak{R}$ non ha punti uniti, da O in fuori. Invero per un punto A qualsivoglia, ma esterno all'asse r, il piano polare dei punti A ed $\mathfrak{R}A$ passa sempre per r, e quindi è diverso da π: onde $\mathfrak{R}A \sim= A/\pi$ e p. c. $(\mathfrak{R}A)/\pi \sim= A$. E similmente un punto B di r, pur che diverso da O, si confonde col punto $\mathfrak{R}B$, ma è diverso dal punto B/π:

onde $\mathfrak{SR}B \sim = B/\pi$. Lo stesso avviene dell'isomeria $\mathfrak{R}\,.\,/\pi$: sicchè basta appellarsi a P 10].

P **13** — *Tr.* « Lo specchiamento ad un piano non può equivalere al prodotto « di un'isomeria per sè stessa ». [Essendo π un piano arbitrario, si proverà che l'ipotesi $\mathfrak{J}^2 = /\pi$, dove $\mathfrak{J}$ è un'isomeria, contraddice a P 11. Ora, se A è un punto arbitrario di π, ed $A' = \mathfrak{J}A$, bisogna che il punto $\mathfrak{J}A'$ coincida con A. dal momento che $\mathfrak{J}(\mathfrak{J}A) = \mathfrak{J}^2 A = A/\pi = A$ (P 31 § 2): dunque il punto $A|A'$ sarà tautologo in $\mathfrak{J}$ (P 42. 43 § 1; P 3, 36 § 4). Ma la $\mathfrak{J}$ non può essere un'identità, nè uno specchiamento, nè una rotazione: se no la $\mathfrak{J}^2$ sarebbe necessariam.^{e} un'identità, o una rotazione (P 1, ecc.); laddove $/\pi$ non equivale a nessuna di queste operazioni (P 31 § 2, P 8 § 4). Nè può essere $\mathfrak{J}$ un' antirotazione, vale a dire $\mathfrak{J} = \mathfrak{S}\mathfrak{R}$ (P 9); perchè n'escirebbe eziandio $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{S}\mathfrak{R}\,.\,\mathfrak{S}\mathfrak{R} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ (ivi) $= \mathfrak{R}^2$. Dunque una $\mathfrak{J}$, per la quale $\mathfrak{J}^2 = /\pi$, non esiste (P 11)].

P **14** — *Tr.* « Similmente il quadrato di un'isomeria non è atto a produrre « un'antirotazione ». [Invero l'ipts. $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{A}$ — essendo $\mathfrak{A}$ un'antirotazione arbitraria — involge la stessa contradizione che dianzi: atteso che $\mathfrak{A}$ ammette un punto tautologo O (P 9), e p. c. la $\mathfrak{J}$ dovrebbe rappresentare in sè stesso il punto medio fra O ed $\mathfrak{J}O$. Ma, fin tanto che $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}^2$, la $\mathfrak{J}$ non può esser nè identità, nè specchiamento, nè antirotazione; perchè $\mathfrak{A}$ non può esser nè rotazione, nè identità (P 23 § 2, P 9)].

P **15** — *Tr.* « Qualsivoglia traslazione, tutto che data ad arbitrio, si può aver « componendo una certa traslazione con sè medesima ». Cfr. P 2. [Siano A , A' due punti arbitrarî, M il lor punto medio. Poichè la traslazione di A in M (P 35 § 6) traduce M in A' (P 39 § 6), il suo quadrato farà corrispondere A' ad A: onde $\left\{ {A' \atop A} \right\} = \left\{ {M \atop A} \right\}^2$, in forza di P 37, 35 § 6].

P **16** — *Tr.* « Qualunque isomeria priva di punti uniti sarà traslazione, se esi- « ston tre rette parallele fra loro, ma non complanari, ognuna delle quali sia con- « vertita in sè stessa ». [Siano u, v, w le tre rette, $\mathfrak{J}$ l'isomeria onde si parla. Se nel piano delle due parallele u, v, ma fuori d'ognuna, tolgasi un punto A a piacere, e dicasi A' il punto $\mathfrak{J}A$; le normali abbassate da questi punti alla retta tautologa u la taglieranno in due punti omologhi P e P', e le due coppie omologhe (A , P) e (A' , P') saranno congrue fra loro (P 36 § 4). Ma i punti A e A' giaccion dalla stessa banda di u; perchè la $\mathfrak{J}$ converte in sè stesso ciascuno dei semipiani, onde il piano tautologo uv è diviso da u (P 44 § 3), dal momento che uno di questi contiene la retta unita v (P 4 § 6): dunque la retta AA' sarà parallela alla u (P 9 § 6, ecc.) e p. cons. tautologa (P 6 § 6). Similmente qualsiasi punto B esterno al piano uv verrà trasferito da $\mathfrak{J}$ in un punto B', che giace dalla stessa banda di B rispetto a quel piano: visto che $\mathfrak{J}$ dee convertire in sè stesso ognuno dei semispazi ecc. poi che in uno di questi giace la retta unita w (P 20, 21 § 6): onde ancor qui si deduce (calando da B e B' le perpendicolari al piano tautologo uv, ecc.) che la congiungente di B con B' è parallela alle rette u, v e, al par di queste, tautologa. Sono dunque tautologhe rispetto ad $\mathfrak{J}$ tutte quante le rette parallele ad u. D'altra

parte due rette omologhe quali che siano, pur che diverse fra loro — p. es. le AB e A'B' — giacciono sempre in un piano senza incontrarsi: perchè, se avessero un punto a comune, la retta unita uscente da questo le taglierebbe in due punti omologhi, ma coincidenti fra loro. Dopo ciò non rimane che da appellarsi a P 35 § 6].

P 17 — *Df.* « Si chiama ' *antitraslazione* ' il prodotto d'una traslazione « arbitraria per lo specchiamento in un piano parallelo ad essa ». — Ovvero (queste due componenti essendo permutabili fra loro, come il Lettor può vedere): ' *Antitraslazione* ' vuol dire: « prodotto di ' specchiamento ' per ' traslazione ' parallela al piano specchiante ».

P 18 — *Tr.* « L'antitraslazione ' $/\pi . \begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}$ ' — essendo π un piano dato a piacere, ed A, A' punti diversi sopra una retta parallela a π, o giacente in esso — « è un'isomeria, che non tiene fermo alcun punto, ma rappresenta in sè stessa « ogni retta del piano π, che sia parallela alla AA' (o coincida con questa); e in « sè stesso il piano π, e ciascun piano perpendicolare a π lungo una retta di quelle. « Non esiste alcun'altra retta tautologa o piano tautologo, da questi in fuori: e le « due bande del piano π si scambieranno fra loro ». Ecc.

P 19 — *Tr.* « Il prodotto d'uno specchiamento, preceduto o seguito da trasla- « zione obliqua al piano specchiante, è un'antitraslazione ». Cfr. P 6 e P 17. [Sia π il piano specchiante e B un suo punto, non importa quale. Una traslazione, tutto che data ad arbitrio, porterà B in qualche altro punto B' (diverso da B) e potrà quindi rappresentarsi con $\begin{Bmatrix} B' \\ B \end{Bmatrix}$ (P 36 § 6). Per Ipts. la retta BB' non è perpendicolare a π, nè giace in π: onde il piano parallelo a π, che passa dal punto B', dovrà tagliar la normale innalzata dal punto B a π in un certo punto — sia p. es. B'' — diverso da B e da B'. Ora il prodotto di $\begin{Bmatrix} B'' \\ B \end{Bmatrix}$ per $\begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix}$ — o di $\begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix}$ per $\begin{Bmatrix} B'' \\ B \end{Bmatrix}$ — eguaglia precisamente la traslazione di B in B' (P 37 § 6): per la qual cosa $\begin{Bmatrix} B' \\ B \end{Bmatrix} . /\pi = \begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} B'' \\ B \end{Bmatrix} . /\pi$. D'altra parte la trasformazione $\begin{Bmatrix} B'' \\ B \end{Bmatrix} . /\pi$ equivale allo specchiamento in un certo piano χ parallelo a π (P 6): dunque $\begin{Bmatrix} B' \\ B \end{Bmatrix} . /\pi = \begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix} . /\chi$: e questa è un'antitraslazione (P 17), poi che la retta B'B'' è parallela a χ (P 20, 15 § 6). — Nel modo stesso $/\pi . \begin{Bmatrix} B' \\ B \end{Bmatrix} = /\pi . \begin{Bmatrix} B'' \\ B \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix} = /\varrho . \begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix}$, essendo ϱ un certo piano parallelo a π].

P 20 — *Tr.* « Nessuna antitraslazione è il quadrato di un'isomeria ». [Se il quadrato di un'isomeria (non importa quale) ϑ fosse per avventura un'antitraslazione ' $/\pi . \begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}$ ' (P 18), qualunque retta p esistente nel piano π e parallela (od uguale) ad AA' dovrebb'esser rappresentata in sè stessa da ϑ, ovvero in qualche altra retta della medesima classe: atteso che il fatto di $\vartheta^2 p = p$ (P 18) porta seco, che anche la retta ϑp sia tautologa per ϑ^2. Il piano π sarebbe dunque tautologo secondo ϑ; e

i due semispazi ch'esso determina — sia che $\mathfrak{J}$ li rappresenti ciascuno in sè stesso, o che li scambi fra loro — risulterebber tautologi secondo $\mathfrak{J}^2$: al contrario di ciò che avviene nell'antitraslazione (P 18)].

P 21 — *Df.* « Si dà il nome di ' elicomozione ' (Schraubenbewegung) alla « risultante d'una rotazione qualsiasi, preceduta o seguìta da una traslazione paral- « lela all'asse di quella. Osservate che la traslazione di A in A' posto che gli « A, A' sian punti diversi — è permutabile con qualsivoglia rotazione intorno alla « retta AA' ».

P 22 — *Tr.* « L'elicomozione non ha punti uniti; nè rette unite, dall'asse in « fuori ». [Dette $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{T}$ le componenti di un'elicomozione arbitraria, si vedrà facilmente che questa non può convertire in sè stesso alcun punto dell'asse r di $\mathfrak{R}$ (P 23 § 2, P 36 § 6); nè alcun punto fuori dell'asse, perchè il piede della normale calata da un tal punto unito a quest'asse risulterebbe tautologo. Nè può la $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ convertire in sè stesso alcun piano che tagli r in un punto, o sia parallelo ad r: ma se un piano passante per r corrisponde a sè stesso, tutti i piani che passan per questa retta risultan tautologi, e la componente $\mathfrak{R}$ sarà un semigiro (P 8, 10 § 4, P 36 § 6, ecc.). L'asse r di $\mathfrak{R}$ è certamente tautologo; ma non può esser tautologa nessuna retta che tagli r in un punto, o sia parallela ad r. E se fosse unita una retta sghemba con r, sarebbe unito anche il piano che la contiene, ed è parallelo ad r. Ecc.].

P 23 — *Tr.* « Esiste sempre un'elicomozione, che ha per quadrato una data « elicomozione ». [Si sa che le componenti $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{T}$ di un'elicomozione arbitraria sono rispettivamente il quadrato di una rotazione $\mathfrak{S}$ intorno al medesimo asse r (P 2) e il quadrato di una traslazione $\mathfrak{G}$ secondo r (P 15): onde $\mathfrak{T}\mathfrak{R} = \mathfrak{G}\mathfrak{G}\mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{G}\mathfrak{S}\mathfrak{G}\mathfrak{S}$ (P 21) $= (\mathfrak{G}\mathfrak{S})^2$].

P 24 — *Tr.* « Il prodotto d'una rotazione arbitraria per qualsivoglia traslazione « obliqua all'asse di quella è sempre un'elicomozione (intorno ad un certo asse, « che è parallelo al primo) ». Cfr. P 8 e P 21. [Si scomponga la traslazione assegnata in due traslazioni $\begin{Bmatrix} B'' \\ B \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} B' \\ B'' \end{Bmatrix}$, che l'una sia perpendicolare e l'altra sia parallela all'asse di rotazione, come in P 19 (B essendo un punto dell'asse); indi si faccian valere le P 8, 21].

P 25 — *Tr.* « Qualunque isomeria priva di punti uniti è necessariamente una « traslazione, o un'antitraslazione, o un'elicomozione ». Cfr. P 11. [Se l'isomeria onde si parla — sia p. es. $\mathfrak{J}$ — rappresenta un punto A qualsivoglia in A', il prodotto di $\mathfrak{J}$ per la traslazione di A' in A, in quanto tien fermo A, non potrà esser che 1) un'identità, ovvero 2) uno specchiamento, o 3) una rotazione, o 4) un'antirotazione (P 11). Nel 1° caso, cioè se $\begin{Bmatrix} A \\ A' \end{Bmatrix} . \mathfrak{J} = 1$, l'isomeria onde si parla equivale alla *traslazione* $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}$ (P 35 § 6). — Nel 2° caso, dal fatto che $\begin{Bmatrix} A \\ A' \end{Bmatrix} . \mathfrak{J} = /\pi$, dove π sarà un certo piano che passa per A, si deduce che $\mathfrak{J} = \begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix} . /\pi$: per la qual cosa (secondo che questo piano è, o non è, perpendicolare alla retta AA') l'isomeria

$\mathfrak{J}$ dovrà essere uno specchiamento, o un'*antitraslazione* (P 6, 17, 19): ma il primo evento è contrario all'Ipts. — Nel 3° caso, che involge $\mathfrak{J} = \left\{{A' \atop A}\right\} . \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ essendo una rotazione, l'asse r della quale contiene A) la $\mathfrak{J}$ non può esser che rotazione (P 8) od *elicomozione* (P 21, 24): ma l'essere $\mathfrak{J}$ priva di punti uniti escluderà, come dianzi, un evento. — Il 4° caso, espresso da $\left\{{A \atop A'}\right\} . \mathfrak{J} = \mathfrak{R}\mathcal{S}$ (P 9) ove $\mathcal{S}$ denota lo specchiamento rispetto al piano σ perpendicolare in A alla r farebb' essere $\mathfrak{J} = \left\{{A' \atop A}\right\} . \mathfrak{R} . \mathcal{S}$. Ora (secondo che r è, o non è, perpendicolare alla retta AA') il prodotto $\left\{{A' \atop A}\right\} . \mathfrak{R}_r$ è una certa rotazione $\mathcal{R}_u$ (P 8), o una certa elicomozione $\mathfrak{Q}_v \mathfrak{T}_v$ (P 21, 24), intorno a qualche altra retta u, o v, parallela ad r e quindi normale a σ: per la qual cosa $\mathfrak{J} = \mathcal{R}_u . \mathcal{S}$, oppure $\mathfrak{J} = \mathfrak{Q}_v . \mathfrak{T}_v . \mathcal{S} = \mathfrak{Q}_v . /\varrho$ (P 6), ϱ essendo un cert'altro piano parallelo a σ; e in ambo i casi la $\mathfrak{J}$ sarebbe un'antirotazione (P 9): il che non può darsi, finchè la $\mathfrak{J}$ è priva di punti uniti. Ecc.]. — Di qui si deduce immediatamente, avuto riguardo a P 11:

P 26 — *Tr.* « L'identità, lo specchiamento, la rotazione, l'antirotazione, la traslazione, l'antitraslazione e l'elicomozione abbracciano tutte le isomerie possibili: cioè non esiste altra sorta d'isomeria dopo quelle ». — In altri termini: Un'isomeria qualsivoglia o converte in sè stesso 1) ogni punto; o 2) tutti i punti d'un piano, ovver 3) d'una retta (od essi soltanto); o 4) ammette un sol punto unito; oppure non ha punti uniti, ma sì rette unite (necessariamente parallele), che 5) non giaccion tutte in un piano, ovvero 6) sono tutte in un piano; oppure 7) non ha punti uniti ed ammette una sola retta tautologa (P 22-24, 30, 37, 38 § 4; P 38 § 6; P 10, 16, 17, 22, 25).

P 27 — *Df.* « Vi sono due generi d'isomeria, ben distinti fra loro. Le une possono aversi come quadrati di altre isomerie; cioè sono tali, che ognuna equivalga al prodotto di un'isomeria per sè stessa: e queste diconsi '*moti*', ovver '*congruenze*'. Le altre — che non sono quadrati d'isomerie, cioè non si ottengono mai componendo un'isomeria con sè stessa — si chiamano '*anticongruenze*' [1] ». Sono del primo genere, ossia *congruenze*: l'identità, la rotazione (P 2), la traslazione (P 15) e l'elicomozione (P 23). Del secondo genere, o *anticongruenze*, lo specchiamento, l'antirotazione e l'antitraslazione (P 13, 14, 20). Osservate che l'inversa di qualunque $\left.{\text{congruenza} \atop \text{anticongruenza}}\right\}$ è ancora una $\left.{\text{congruenza} \atop \text{anticongruenza}}\right\}$: però che dall'eguaglianza $\mathfrak{C} = \mathfrak{J}^2$ (dove $\mathfrak{J}$ è un'isomeria qualsivoglia) nasce sempre che $\overset{-1}{\mathfrak{C}} = \left(\overset{-1}{\mathfrak{J}}\right)^2$.

[1] Il criterio di separazione che qui si fa intervenire è (per mio conto) assai più maneggevole dell'ordinario, che insiste sulla nozione dei *sensi* o *versi* d'una figura solida — p. es. di un triedro orientato, di un tetraedro, ecc. — oltre che molto più generale, in quanto si presta così tale e quale (salvo il diverso significato dei termini, che stanno in vece di isomeria, congruenza, ecc.) a vari altri uffici consimili: p. es. alla distinzione fra le *omografie* e le *antiomografie*, nel dominio della Geom.ª proiettiva complessa.

P 28 — *Tr.* « Qualunque moto che tenga fermo un punto è di rotazione (se « non è identità) ». — EULERO, *Form. gen. pro translat. corp. rigid.* [Da P 36 « § 6, P 22, 26, 27, ecc.].

P 29 — *Tr.* « Il prodotto di due o più congruenze (quali che siano) è di nuovo « una congruenza ». [Poi che vi sono tre specie di moto (astrazion fatta dall'identità), e cioè rotazione, traslazione ed elicomozione, conviene distinguer sei casi. Il prodotto di due rotazioni si è già contemplato in P 1, 3, 7, quando gli assi coincidono, oppur sono concorrenti, o paralleli: resta l'ipts., che gli assi u e v delle due componenti $\mathcal{S}$ e $\mathfrak{Q}$ siano due rette sghembe. Allora — preso in u un punto A a piacere, e tolto $A' \equiv \mathfrak{Q}A$ — il prodotto della rotazione $\mathfrak{Q}_v$ per la traslazione di A' in A, normale all'asse di quella, è una certa rotazione $\mathfrak{R}_w$ intorno a qualche altro asse w parallelo a v (P 8) e contenente A: per la qual cosa $\left\{ {A \atop A'} \right\} . \mathfrak{Q} . \mathcal{S} = \mathfrak{R} . \mathcal{S}$; e il secondo membro sarà una nuova rotazione $\mathfrak{G}_t$ intorno a qualche altra retta t uscente da A (P 3). Dunque $\mathfrak{Q} . \mathcal{S} = \left\{ {A' \atop A} \right\} . \mathfrak{G}$; e p. cons. il prodotto $\mathfrak{Q} . \mathcal{S}$ sarà in ogni modo una rotazione, o un'elicomozione (P 8, 21, 24).— Il prodotto di due traslazioni sarà sempre una traslazione, o un'identità (P 37 § 6). — Di poi le P 8, 21, 24 contemplano le varie ipts. di rotazioni, precedute o seguite da traslazioni. — Infine ciascuna delle altre combinazioni (prodotto di due elicomozioni, oppur di elicomozione per traslazione o rotazione) si risolve sempre in prodotto di rotazioni e traslazioni, grazie a P 21].

P 30 — *Tr.* « Ogni volta che si compongon fra loro una congruenza e un'an« ticongruenza, il prodotto è sempre un'anticongruenza ». [Se la conguenza $\mathfrak{C}$ e l'anticongruenza $\mathfrak{A}$ producessero una congruenza $\mathfrak{C}'$ — vale a dire se $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, oppure $\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}'$ — ne verrebbe $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}'\overset{-1}{\mathfrak{C}}$, o $\mathfrak{A} = \overset{-1}{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}'$, dove $\overset{-1}{\mathfrak{C}}$ è ancora una congruenza (P 27); contro P 29].

P 31 — *Tr.* « Il prodotto di due anticongruenze quali che siano appartiene alla « congruenza ». [Il prodotto di due specchiamenti non può esser che identità, rotazione o traslazione (P 4 § 4, P 5). Il prodotto delle antirotazioni $\mathcal{S}\mathfrak{R}$ ed $\mathcal{S}'\mathfrak{R}'$ (P 9) — dove $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ denotano gli specchiamenti a due piani arbitrari σ e σ', ed $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}'$ son rotazioni intorno a due assi rispettivamente normali a quei piani — equivale ad $\mathfrak{R}'(\mathcal{S}'\mathcal{S})\mathfrak{R}$ (ivi), dove i fattori son tutti e tre congruenze. — Per egual modo un'antirotazione $/\sigma . \mathfrak{R}$, preceduta o seguita da un'antitraslazione $/\pi . \mathfrak{T}$ (P 17) — $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{T}$ essendo una rotazione e una traslazione, parallele rispettivamente ai due piani σ e π — produce le congruenze $\mathfrak{T}\,(/\pi . /\sigma)\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(/\sigma . /\pi)\mathfrak{T}$ (P 29, ecc.). — Gli altri casi al Lettore].

P 32 — *Tr.* « Due figure piane isomere son sempre omologhe per con« gruenza ». [Se l'isomeria onde si passa dall'una all'altra figura non è congruenza, basterà farla seguire dallo specchiamento nel piano della seconda di esse (P 31): ecc. ecc.]. Così resta giustificato l'epiteto di ' *congruenti* ', che imponemmo per dfnz. a figure piane ' isomere ' sin dal § 4° (P 36 § 4).

P 33 — *Tr.* « Una sola $\left. {\text{congruenza} \atop \text{anticongruenza}} \right\}$ è capace di sovrapporre la terna

« costituita in un punto A, in un raggio |AB che muova da questo punto, e in « un semipiano |(AB)C terminato alla retta AB (essendo A, B, C tre punti non « collineari), ad un' altra terna consimile A', |A'B', |(A'B')C' ». [Così da P 39, 42 § 4, avuto riguardo alle P 27, 30]. — E di quì tosto anche l'altra:

P 34 — *Tr.* « Sono eguali tra loro due $\left.\begin{matrix}\text{congruenze}\\ \text{anticongruenze}\end{matrix}\right\}$, che sovrappongon, sì « l'una che l'altra, una data terna di punti non collineari ad una medesima terna « di punti ».

§ VIII.

Sensi o versi d'una retta e d'un cerchio. Ascisse. Rappresentazione della retta sul numero reale. Distanza di due punti. Continuità della retta.

P 1 — *Df.* « Premesso che A e B sono punti diversi l'uno dall'altro, ed X è « un punto arbitrario di AB, con la frase '*seguente* X *nel senso* A→B, « o *da* A *verso* B' — condensata in '$\sigma_{A,B}$X' — si vuol denotare: 1) la figura « '|AB ∼ |AX|', che nasce escludendo dalla semiretta A per B tutti i punti del « segmento |AX|, se X appartiene ad |AB; 2) la figura '|XA ∼ ιX', che nasce esclu- « dendo dal raggio X per A il solo punto X, se X non appartiene ad |AB. Ved. « P 10, 29 § 3 ». — Resta così definito un certo segno di funzione o trasformazione $\sigma_{A,B}$ (seguente nel verso A→B), che messo innanzi ad un punto della congiungente A con B, qual ch'esso sia, produce su questa retta un'intera classe di punti. Una trasformazione sì fatta (della AB in classi di AB), che a ciascun punto X della retta subordina i punti rappresentati da $\sigma_{A,B}$X, prende nome di 'senso A→B, o — da A verso B'. — Osservate che il senso A→B sarà un covariante di (A, B) rispetto a qualunque similitudine. Ecc.

P 2 — *Tr.* « Sotto le stesse Ipts., il punto X (qual ch'esso sia) non appartiene « a $\sigma_{A,B}$X; e cioè nessun punto è seguente di sè medesimo. E sarà inoltre palese « che $\sigma_{A,B}$A = |AB ∼ ιA, $\sigma_{A,B}$B = |AB ∼ |AB|: che A non segue alcun punto di « |AB, ma è seguente d'ogni altro punto di AB: e che, quando X appartiene « ad |AB, ma è diverso da A, i suoi seguenti generan l'ombra di X da A, « esclusa l'origine X ».

P 3 — *Tr.* « E, comunque sian presi i punti X ed Y sopra la retta AB, non « si può dare ad un tempo, che Y sia seguente di X ed X seguente di Y nel senso « A→B. Cioè: non esiston due punti, ciascuno seguente dell'altro in un medesimo « senso ». [Se i punti X ed Y giaccion, sì l'un come l'altro, nel raggio |AB, le ipts. Y ε $\sigma_{A,B}$X ed X ε $\sigma_{A,B}$Y involgon che Y non appartenga ad |AX|, nè X ad |AY| (P 1), e p. c. che A appartenga ad |XY| (P 15 § 3): ma ciò contraddice a P 33 § 3, poi che A è diverso da X e da Y (P 2). — Se X giace in |AB ma non Y, le condizioni Y ε $\sigma_{A,B}$X e X ε $\sigma_{A,B}$Y sono eziandio contraddittorie; poi che dalla prima si

esige che Y giaccia in |AB come X (P 1). — Infine, se tanto X quanto Y siano fuori di |AB, e perciò diversi da A — onde Y giace in |AX ed X in |AY (P 36, 34 § 3) — il supporre ad un tempo Y ε |XA ∼ ι X e X ε |YA ∼ ι Y (P 1) porterebbe ad Y ε |AX| ∼ ι A ∼ ι X ed X ε |AY| ∼ ι A ∼ ι Y (P 31 § 3): contro P 12 § 3].

P 4 — *Tr.* « Sempre che A, B siano punti diversi ed X, Y punti di AB, eziandio non coincidenti; allora delle due cose l'una: o Y sarà un seguente X, o X un seguente Y, nel senso A → B ». [Se uno dei punti X, Y coincide con A, la tesi è già stabilita in P 2: si può dunque concedere A diverso da X e da Y. Or, se ambedue questi punti cadono sul raggio |AB, sarà giuocoforza che Y spetti ad |AX|, oppure X ad |AY| (P 33 § 3): e nel primo caso X, in quanto escluso da |AY| (P 12 § 3) ma giacente in |AB, sarà un $\sigma_{A,B}$Y (P 1); nell'altro caso sarà similmente Y un $\sigma_{A,B}$X. — Di poi, se uno solo dei punti X ed Y — per es. X — giace nel raggio |AB, allora Y sarà punto esterno ad |AX| ed X ad |AY| (P 34, 29 § 3); quindi A giacerà fra X e Y (P 15, 10 § 3), e per cons. X nel raggio |YA (P 29 § 3): onde X ε $\sigma_{A,B}$Y (P 1). — Infine, supposto che tanto X quanto Y giacciano fuori di |AB, si deduce che Y sarà contenuto da |AX (P 36, 34 § 3); per la qual cosa dovrà Y appartenere ad |AX|, oppure X ad |AY| (P 33 § 3); dunque Y ad |XA, oppure X ad |YA (P 29 § 3), che è quanto dire 'Y ε $\sigma_{A,B}$X oppure X ε $\sigma_{A,B}$Y' (P 1)].

P 5 — *Tr.* « Dati i punti A e B come sopra, se X, Y sono punti di AB, ed Y è seguente X nel senso A → B, tutti i punti che seguono Y seguiranno anche X: cioè la figura $\sigma_{A,B}$Y sarà contenuta dall'altra $\sigma_{A,B}$X ». [Se X coincide con A, basta appellarsi a P 2, atteso che la figura |AB ∼ |AY| giace tutta in |AB ∼ ι A. Sia dunque X diverso da A: e in primo luogo X appartenga ad |AB. Poi che Y ε |AB ∼ |AX| per Ipts. (P 1) ed A ∼ ε |XY| (P 33 § 3), bisogna che X appartenga ad |AY| (P 15 § 3), e per cons. che |AX| sia contenuto in |AY| (P 19 § 3). Dunque |AB ∼ |AY| Ɔ |AB ∼ |AX|, vale a dire $\sigma_{A,B}$Y Ɔ $\sigma_{A,B}$X. — Appresso, poniamo che X non giaccia in |AB. Ora, da Z ε |AB ∼ ι A si deduce, qualunque sia Z, che |AZ = = |AB (P 34 § 3); onde Z non appartiene ad |AX|, nè X ad |AZ| (P 29 § 3), ma sì A ad |XZ| (P 15 § 3); dunque Z ad |XA, e per cons. |AB Ɔ |XA. Se pertanto Y giace in |AB, sarà vero che $\sigma_{A,B}$Y Ɔ $\sigma_{A,B}$X (P 1). Ma potrà darsi che Y giaccia in |XA ∼ |AB: allora X ∼ ε |YA| ed A ∼ ε |XY| (P 33, 36 § 3); quindi Y ε |XA| (P 15 § 3) e per cons. |YA| Ɔ |XA| (P 19 § 3). D'altra parte il supporre A ε |YT| produce A ε |XT|, qualunque sia T (P 14 § 3), dal momento che A ∼ ε |XY|. Dunque |YA Ɔ |XA (P 29 § 3) e per cons. $\sigma_{A,B}$Y Ɔ $\sigma_{A,B}$X (P 1)].

P 6 — *Df.* « Ferma stante l'Ipts. fondamentale circa A, B, X (P 1), si dice che un punto Y della medesima retta AB '*precede* X', o è '*un precedente* X' *nel senso* (*o rispetto al senso*) A → B, qualunque volta X è un seguente Y a tenor di quel senso. Insomma la frase '*precedente rispetto al senso* A → B' non è che un modo per significare la trasformazione *inversa* di $\sigma_{A,B}$. Ved. P 1 ». — Le P 3, 4 permettono allor di concludere a vista, che: « Precedono X tutti i punti di AB che non appartengono a $\sigma_{A,B}$X, nè si confondon con X; e questi soltanto ». Di poi si dimostra che:

P 7 — *Tr.* « La figura 'precedente Y nel senso A → B' non differisce dalla figura 'seguente X nel senso B → A'. O, in altri termini, la trasfor-

« mazione inversa di $\sigma_{A,B}$ si confonde col senso $B \rightarrow A$: $\overset{-1}{\sigma}_{A,B} = \sigma_{B,A}$ ». [Grazie a P 6 la figura ' precedente X nel senso $A \rightarrow B$ ' — o $\overset{-1}{\sigma}_{A,B} X$ — non è altro che ' $AB \sim \sigma_{A,B} X \sim \iota X$ '. Pertanto, se $X \varepsilon |AB \sim \iota A$ (com'è da supporre in primo luogo) la figura $\overset{-1}{\sigma}_{A,B} X$ sarà il complemento dell'ombra di X da A (P 2, 6), vale a dire $|XA \sim \iota X$ (P 29, 30 § 3). Ora, poichè $A \sim \varepsilon |XB|$ (P 33 § 3), ciascuna delle condizioni $A \varepsilon |BY|$, $A \varepsilon |XY|$ sarà conseguenza dell'altra, rispetto ad Y (P 14 § 3); e di qui — nel supposto che X appartenga ad $|AB|$, e avuto riguardo alle P 18, 20, 29 § 3 — si deduce $|XA \sim \iota X = |BA \sim |BX|$; onde $\overset{-1}{\sigma}_{A,B} X = |BA \sim |BX| = \sigma_{B,A} X$ (P 1): conseguenza, che regge eziandio nell'ipts. $X = A$ (P 2). Ma potrà darsi che X appartenga ad $|AB \sim |AB|$. Allora $B \varepsilon |XA|$ (P 29, 10 § 3) e p. cons. $|XA = |XB$ (P 29, 34 § 3); dunque $\overset{-1}{\sigma}_{A,B} X$, che equivale (come abbiam visto) ad $|XA \sim \iota X$, coinciderà con $|XB \sim \iota X$, vale a dire con $\sigma_{B,A} X$ (P 1), poi che X non appartiene a $|BA$ (P 29, 30 § 3). — Appresso, se X non appartiene ad $|AB$, onde $X \varepsilon |BA$ (P 30 § 3), la figura $\overset{-1}{\sigma}_{A,B} X$ — che equivale ad $AB \sim |XB$ (P 1, 6), dal momento che $B \sim \varepsilon |AX|$ ed $X \sim \varepsilon |AB|$ (P 29 § 3), sicchè $A \varepsilon |XB|$ (P 15 § 3) e per cons. $|XA = |XB$ (P 34 § 3) — non differisce dalla figura $|BX \sim |BX|$, cioè da $\sigma_{B,A} X$: poi che sì l'una che l'altra, aggiunte ad X, fanno l'ombra di X da B (P 29, 30 § 3). Ecc.] — Con argomentazioni in tutto simili a queste si proverebbe eziandio che:

P 8 — *Tr.* « Dati A, B, X come sopra e presi a piacer sulla retta due nuovi « punti A′ e B′, purchè A′ preceda B′ nel senso $A \rightarrow B$; allora il senso $\sigma_{A',B'}$ non « differisce dal senso $\sigma_{A,B}$: cioè $\sigma_{A',B'} X = \sigma_{A,B} X$, qualunque sia X ». — Per la qual cosa, avuto riguardo a P 4, 7:

P 9 — *Tr.* « Se C e D sono punti arbitrari di AB, purchè non coincidenti, « bisognerà che il senso $C \rightarrow D$ si confonda col senso $A \rightarrow B$, o col senso $B \rightarrow A$ ». — Insomma: ciascuna retta possiede *due sensi* l'un l'altro distinti, e non più di due: sensi, a cui ben s'addice il predicato di ' *contrari* ' od ' *opposti* ' fra loro, in virtù di P 7.

P 10 — *Tr.* « Nell'Ipts. P 8, la classe dei punti, che seguono A′ e precedon « B′ nel senso $A \rightarrow B$, consiste nei punti che giaccion fra A′ e B′ ». [Atteso che questi sono i punti comuni alle due figure $|A'B' \sim \iota A'$ e $|B'A' \sim \iota B'$ (P 31 § 3), vale a dire i punti comuni alle classi $\sigma_{A',B'} A'$ e $\sigma_{B',A'} B'$ (P 2) che non differiscon da $\sigma_{A,B} A'$ $\sigma_{B,A} B'$ (P 8)]. — Osservate ancora che:

P 11 — *Tr.* « Una traslazione, per cui la retta scorra su sè medesima, non « altera mai nè l'un senso nè l'altro: laddove ogni simmetria della retta con sè « medesima (se non ne rispecchia in sè stesso ogni punto) permuta i sensi fra loro ». [Basterebbe provare il secondo comma, visto che ogni traslazione è il prodotto di due specchiamenti (P 5 § 7, ecc.): ma si lascia al Lettore. — Pur si osserva che la traslazione di A in A′ (P 35 § 6) — dove A′ sia un punto arbitrario del raggio $|AB$, l'origine esclusa — in quanto subordina i punti A′ e A/A′ ai punti A ed A′ (P 39 § 6) e però converte il senso $A \rightarrow A'$ nel senso $A' \rightarrow A/A'$ (P 34 § 6, P 1), non altera $\sigma_{A,B}$; dal momento che, posto $A'' \equiv A/A'$, ne risulta $A'' \varepsilon |AB \sim |AA'|$ (P 34, 29, 12 § 3) e per cons. $\sigma_{A,B} = \sigma_{A,A'} \equiv \sigma_{A',A''}$ (P 2, 8)].

P 12 — *Df.* « Siano O, A, B tre punti non collineari, e B disti da O quanto A; *k* sia il cerchio d'intersezione del piano OAB con la sfera di A, centro O. Chiameremo « *semicerchio* A *per* B, *centro* O » — o succintamente ' O(AB ' — la classe dei punti, che il cerchio *k* ha in comune col semipiano ' da OA verso B '; e « *arco* (AB), *centro* O » — o più brevemente ' O(AB) ' — la classe dei punti, che *k* ha in comune con l'angolo piano convesso $\hat{O}$.AB. — I punti A ed A/O, ovvero A e B, saranno gli ' *estremi* ' del semicerchio O(AB e dell'arco O(AB). ' *Interni* ' al semicerchio, od all'arco, quei punti dell'una o dell'altra figura che non coincidono con detti estremi. Giaccion ' fra A e B su *k* ' (sempre che A, B, O non collineino) i punti interni all'arco O(AB), e questi soltanto. Ecc ». Ved. P 39, 47 § 3; P 45 § 1, ecc.

P 13 — *Df.* « Dati O, A, B come sopra, e posto A' = A/O, B' = B/O; se X è un punto arbitrario del cerchio *k* (cioè della classe OAB $\cap$ A_0 come dianzi), per « *seguente* X *nel senso* A → B, *centro* O » — locuzione simboleggiata in ' $\sigma_{O,A,B}$X ' — s'intende: 1) la classe dei punti interni al semicerchio O(AB, ovvero al semicerchio O(A'B' — se X coincide con A, ovvero con A'; 2) la classe dei punti interni al semicerchio O(XA' — se X è interno al semicerchio O(AB; 3) la classe dei punti interni al semicerchio O(XA — se X è interno al semicerchio O(A'B'. — ' *Precedente* X ' (nel senso A → B, centro O) si chiama ogni punto, il quale abbia X per seguente. Ved. P 12 e cfr. P 1, 6 ». — Poi che il cerchio *k* è la somma logica dei due semicerchi O(AB e O(A'B (P 39, 44 § 3), sarà così definita una certa ' trasformazione del cerchio in sè stesso ' (e propriamente di *k* in classi di *k*), cui spetta il nome di ' *senso* A → B, *centro* O ' compendiato nel simbolo ' $\sigma_{O,A,B}$ '. E se consideriamo che la dfnz. è simmetrica nelle due coppie di punti (A, B) e (A', B') ne possiam tosto inferire che $\sigma_{O,A,B} = \sigma_{O,A',B'}$: cioè che l'equinversione rispetto al centro del cerchio non altera i sensi di questo. — Si osservi ancora, che nessun punto di *k* è seguente di sè medesimo nel senso A → B, centro O. Ecc.

P 14 — *Tr.* « Sotto le stesse Ipts., se un punto Y è seguente X nel senso A → B, (centro O) per certo X non potrà essere un seguente Y ». Cfr. P 3 [Pongasi X' = X/O e Y' = Y/O. Se X = A e p. c. Y ε O(AB $\sim \iota$A $\sim \iota$A' (P 13), i punti X e A' giaceranno da bande opposte di OY (P 38 § 3); onde X, come escluso dal semipiano |(OY)A', non potrà stare nel semicerchio O(YA' (P 12): che è quanto dire X $\sim \varepsilon$ $\sigma_{O,A,B}$Y (P 13). Se il punto X sarà interno al semicerchio A per (B centro O) allora Y, come seguente di X, non potrà esser che interno all'arco O(XA'), oppure interno ad O(A'X'), ovvero uguale ad A' (P 13) — dal momento che O(XA' = = O(XA') $\cup$ O(A'X'), qualunque sia X (P 12, ecc). Ma nel primo caso X e A', nel secondo X ed A. giaceranno da bande opposte di OY: onde X escluso dal semicerchio O(YA', ovvero dal semicerchio O(YA (P 12); mentre nel terzo caso X cadrà fuori del semicerchio O(YB': e in tutti e tre si verifica che X $\sim \varepsilon$ $\sigma_{O,A,B}$Y. — Infine, se X = A', o interno al semicerchio O(A'B', si ritorna sui casi già contemplati, a traverso lo scambio di A con A' e di B con B' (P 13)]. — Con la stessa facilità si dimostra che:

P 15 — *Tr.* « Presi a piacere sul cerchio *k* due punti X ed Y, pur che diversi fra loro e non simmetrici rispetto ad O, delle due cose l'una: o Y sarà un se-

« guente X, o X un seguente Y nel senso $A \rightarrow B$ (centro O) ». Cfr. P 4. [Se X coincide con A, la Tesi è vera senz'altro, però che A precede ogni punto interno ad O(AB e segue ogni punto interno ad O(A'B' (P 13). E se tanto X quanto Y sono interni al semicerchio O(AB, sarà Y un seguente X, od X un seguente Y, secondo che Y giace nell'arco O(XA'), o nell'arco O(AX): e invero nel secondo caso i punti A ed X, al pari degli A, A', si troveranno da bande opposte di OY, e p. c. X e A' dalla stessa banda; onde $X \varepsilon$ O(YA', ecc. Di poi, supposto X interno ad O(AB, ma Y interno ad O(A'B', sarà Y un seguente X, oppure X un seguente X, secondo che Y giace nell'arco O(A'X') o nell'arco O(X'A): e invero nel secondo caso i punti A' ed X, al pari di A' ed A, si troveranno da bande opposte di OY, e p. c. A ed X dalla stessa banda; onde $X \varepsilon$ O(YA, ecc. Gli altri casi possibili — vale a dire $X = A'$, ovvero $X, Y \varepsilon$ O(A'B' $\sim \iota$A' $\sim \iota$A, ovvero $X \varepsilon$ O(A'B' $\sim \iota$A' $\sim \iota$A e $Y \varepsilon$ O(AB $\sim \iota$A $\sim \iota$A' — si riportano a quelli testè contemplati, mercè lo scambio di A con A' e di B con B', che non altera il senso $A \rightarrow B$]. Ne viene che:

P **16** — *Tr.* « I punti del cerchio, che nel senso $A \rightarrow B$ (centro O) prece- « dono X, sono i punti del cerchio, i quali non seguono X, nè coincidon con X od « X': così che di due punti arbitrarî di k, purchè non coincidenti fra loro, nè dia- « metralmente opposti, uno deve precedere e l'altro seguire ». — Per la qual cosa, ogni volta che $Y \varepsilon \sigma_{O,A,B} X$, il punto Y' (P 14) — in quanto escluso dal semicerchio O(XY e diverso da X e da X' — dovrà precedere X; quindi Y dovrà precedere X'.

P **17** — *Tr.* « E, sul cerchio k (P 12), la trasformazione « precedente, « rispetto al senso $A \rightarrow B$ » — cioè $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B}$ (P 13) — non si distingue dal « senso $B \rightarrow A$ ». Cfr. P 7. [Se $X = A$, la figura $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B} X$ è lo stesso che O(AB' $\sim \iota$A $\sim \iota$A' (P 16) e però si confonde con $\sigma_{O,B,A} X$ (P 13). Se $X \varepsilon$ O(AB) $\sim \iota$A $\sim \iota$B, dunque interno al semicerchio O(BA, la figura $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B} X$ — vale a dire O(XA $\sim \iota$X $\sim \iota$X' — coincide con O(XB' $\sim \iota$X $\sim \iota$X', che è precisamente $\sigma_{O,B,A} X$: atteso che i punti A e B saranno allora da bande opposte di OX, e per cons. A e B' dalla stessa banda. E se $X \varepsilon$ O(BA') $\sim \iota$B $\sim \iota$A', dunque interno al semicerchio O(BA', la figura $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B} X$ — vale a dire O(XA $\sim \iota$X $\sim \iota$X' — non differisce da O(XB $\sim \iota$X $\sim \iota$X', cioè da $\sigma_{O,B,A} X$; però che B ed A', al pari di A ed A', saranno allora da bande opposte di OX, e quindi A e B dalla stessa banda. Appresso, se $X = B$, l'eguaglianza $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B} X =$ O(BA $\sim \iota$B $\sim \iota$B' prova senz'altro che $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B} X = \sigma_{O,B,A} X$. Infine se $X = A'$, oppure X interno ad O(A'B', sarà già dimostrato che $\overset{-1}{\sigma}_{O,A',B'} X = \sigma_{O,B',A'} X$, e per cons. che $\overset{-1}{\sigma}_{O,A,B} X = \sigma_{O,B,A} X$ (P 13)]. — E si potrebbe oramai riscontrare che:

P **18** — *Tr.* « Sotto le stesse Ipts., e se C e D sono altri punti del cerchio k « non coincidenti fra loro, nè diametralmente opposti, il senso $\sigma_{O,C,D}$ si confonde « necessariamente col senso $\sigma_{O,A,B}$ o col senso $\sigma_{O,B,A}$, secondo che C precede o « segue D nel senso $A \rightarrow B$, centro O ». Cfr. P 9. — La dfnz. P 13 dell'*ordine chiuso* (nei punti d'un cerchio, o nei raggi d'un fascio) non cede per simmetria ed eleganza al paragone di tutte le altre a me note (Cfr. per es. B. Levi, ' *Sul-*

l'eguaglianza diretta e inversa delle figure', in Periodico di Matematica, XIX, (1904); e i teoremi che ne derivano non sono prpsz. men semplici di quelle, che si riferiscono all'*ordine aperto* nei punti d'una medesima retta (P 1-11). Per altro codesto senso circolare o angolare (da non confonder con gli ordinamenti naturali e coi sensi d'un fascio di rette) non possiede tutte le qualità del senso lineare: per es. l'operazione significata da $\sigma_{0,A,B}$ non è transitiva, cioè non consente un teorema come sarebbe P 5.

P 19 — *Df.* « Allorquando fra i punti d'una figura e la serie dei numeri natu- « rali più aver luogo una corrispondenza perfetta, si suol dire che quella figura è una « '*classe numerabile*' di punti. E se i punti $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, P_{n+1}, \ldots$ d'una « medesima classe numerabile (ciascuno essendo l'omologo del proprio indice) « giacciono tutti allineati, e si svolgono ordinatamente in uno dei sensi che spet- « tano al loro sostegno (P 9) — di guisa che il punto P_{n+1} segua il punto P_n in « quel senso, qualunque sia l'indice n — allora la classe ordinata $\}P\{ \equiv P_1, P_2,$ « $P_3, \ldots P_n, P_{n+1}, \ldots$ prende nome di '*progressione*' (*Fundamentalreihe,* « secondo G. Cantor). Anzi, una volta assegnati sopra la retta due punti A e B « (A diverso da B) la progressione $\}P\{$ sarà da chiamare '*ascendente*', ovvero « '*discendente*', rispetto al senso $A \rightarrow B$, secondo che P_{n+1} è seguente « P_n nel senso $A \rightarrow B$, ovver nel senso $B \rightarrow A$; cioè secondo che P_{n+1} segue o « precede P_n nel senso $A \rightarrow B$ (P 1, 7, 8). — Un punto S della retta AB dicesi « '*limite superiore*' d'una progressione $\}P\{$ ascendente nel senso $A \rightarrow B$, « se S non precede alcun punto di $\}P\{$ nel senso $A \rightarrow B$; ma fra S ed un punto « che lo preceda, qual ch'esso sia — cioè fra S e ciascun $\sigma_{B,A}S$ — giace sempre « alcun punto di $\}P\{$. Similmente un punto I della AB sarà '*limite inferiore*' « d'una progressione $\}Q\{ \equiv Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n, Q_{n+1}, \ldots,$ discendente rispetto « al senso $A \rightarrow B$, qualunque volta I non segue alcun punto di $\}Q\{$ nel senso $A \rightarrow B$; « ma fra I ed un punto che gli succeda, qual ch'esso sia — cioè fra I e ciascun « $\sigma_{A,B}I$ — giace sempre alcun punto di $\}Q\{$. — I concetti di 'senso', di 'pro- « gressione', di 'limite superiore o inferiore' sono invarianti rispetto « a qualunque similitudine — tali essendo i concetti di sfera, di retta, di « segmento, di raggio, ecc. ». Ved. § 4, P 1 e 2.

P 20 — *Tr.* « Due limiti $\left.\begin{matrix}\text{superiori}\\\text{inferiori}\end{matrix}\right\}$, l'un l'altro distinti, d'una medesima « progressione $\left.\begin{matrix}\text{ascendente}\\\text{discendente}\end{matrix}\right\}$ non posson coesistere ». [Poniamo che i punti S ed S', quantunque diversi fra loro, sian limiti superiori d'una medesima progressione $\}P\{$ ascendente nel senso $A \rightarrow B$ (P 19). Uno di essi dovrà seguir l'altro in quel senso (P 4): sia per es. S' un seguente di S. Per Ipts. S non precede alcun punto di $\}P\{$, ma fra S ed S' deve cader qualche punto di $\}P\{$ (P 19). Ora questi due fatti sono contraddittori, in virtù di P 6, 10].

P 21 — *Tr.* « Sempre che A, B siano punti distinti e qualunque siano gli « interi positivi i ed l, sempre il punto δ_i — cioè l'i-esimo punto ipermedio di « A, B verso A (P 18 § 4) — precede il punto δ_{i-1} e segue il punto A nel senso « $A \rightarrow B$: mentre il punto $\delta_{i,l}$ (Ivi) seguirà sempre il punto $\delta_{i,l-1}$ ». [Dal fatto che i punti ipermedi e i mediosimmetrici di A, B verso A sono tutti nel raggio A per

B (P 18 § 4), mentre il punto δ_i giace fra i punti δ_{i-1} ed A (P 11 § 3), e $\delta_{i,l-1}$ fra $\delta_{i,l}$ ed A (P 18, 16 § 4) si ritrae che $\delta_{i-1} \varepsilon |AB \sim |A\delta_i|$, e $\delta_{i,l} \varepsilon |AB \sim |A\delta_{i,l-1}|$ (P 12 § 3); ossia che $\delta_{i-1} \varepsilon \sigma_{A,B}\delta_i$, e $\delta_{i,l} \varepsilon \sigma_{A,B}\delta_{i,l-1}$ (P 1): ecc.].

P **22** — *Tr.* « E la serie dei punti $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_i, \ldots \delta_i, \delta_{i+1}, \ldots$, — cioè « dei punti ipermedi di A, B verso A (P 18 § 4), ordinati secondo i valori cre- « scenti dell'indice — costituisce in |AB| e rispetto al senso A → B una p r o- « g r e s s i o n e d i s c e n d e n t e, che ha il punto B come origine, e il punto A per « l i m i t e i n f e r i o r e. Ved. P 19 ». [Invero quei punti sono ordinati nel senso B → A e tutti seguono A nel senso A → B (P 7, 21). Di più, se C è un punto arbitrario di |AB, qualche punto ipermedio di A, B verso A dovrà cader senza fallo tra i punti A e C (P 20 § 4): onde basta appellarsi a P 19].

P **23** — *Tr.* « Di nuovo essendo A e B punti distinti, ciascun punto A′ del « raggio |AB, tutto che dato ad arbitrio, è sempre l i m i t e i n f e r i o r e d'una pro- « gressione di punti $\delta_{i,l}$ — cioè di medio-simmetrici della coppia (A, B) — discen- « dente rispetto al senso A → B ». [Se A′ = A, basterebbe invocare la P 22, richiamandosi a P 18 § 4: si può dunque conceder che A′ ed A sian diversi fra loro. La traslazione di A in A′, non alterando il senso A → B (P 11), converte la progressione $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ testè considerata (P 22) in un'altra progressione (eziandio discendente) $\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \ldots$: la quale avrà il punto A′ per limite inferiore (P 19), e giacerà tutta in |AB, dal momento che i nuovi punti, come seguenti di A′, dovranno seguire anche A (P 2, 5). Or nell'insieme dei punti medio-simmetrici di A, B verso A, che giusta P 21 § 4 cadranno f r a d u e e l e m e n t i c o n s e c u t i v i quali che siano della nuova serie — p. es. fra δ'_n e δ'_{n+1}, n essendo un numero intero positivo — si notin quelli, per cui la somma degli indici i, l (P 18 § 4) prenderà il valor m i n i m o; e di tra questi si scelga il punto a cui spetta il m i- n i m o valore del secondo indice l, e sia p. es. δ_{i_n, l_n}. Un tal punto è determinato ed unico per ciascun indice n; e si può dimostrar che la serie (di punti medio-simmetrici):

$$\delta_{i_1, l_1}, \delta_{i_2, l_2}, \ldots \delta_{i_n, l_n}, \ldots$$

è ancora una progressione discendente rispetto al senso A → B, ed ammette lo stesso punto A′ per limite inferiore. Invero il punto $\delta_{i_{n+1}, l_{n+1}}$, giacendo fra i punti δ'_{n+1} e δ'_{n+2}, è obbligato a precedere il punto δ'_{n+1} (P 10) e p. cons. anche il punto δ_{i_n, l_n} che sta fra δ'_n e δ'_{n+1} (P 5, 7, 10). Di più δ_{i_n, l_n} sarà sempre un seguente di A′ al pari di δ'_{n+1} (P 5): e se C′ è un seguente di A′, e però qualche punto della progressione $\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \ldots$ giace fra A′ e C′ (P 19) — per es. il punto δ'_m, quindi anche i punti $\delta'_{m+1}, \delta_{m+2}, \ldots$ — senza fallo anche i punti $\delta_{i_m, l_m}, \delta_{i_{m+1}, l_{m+1}}, \ldots$ cadranno fra A′ e C′].

P **24** — *Tr.* « I punti $\delta_{i,l}$ e $\delta_{i+1,2l}$ coincidono, qualunque siano gli indici i, l. « Ved. P 18 § 4 ». [Invero dal fatto che $\delta_{i+1} = A|\delta_i$ (ivi) si deduce $\delta_i = A/\delta_{i+1}$ (P 45 § 1) che è quanto dire $\delta_{i,1} = \delta_{i+1,2}$. Inoltre $\delta_{i,0} = \delta_{i+1,0}$ (ivi): sicchè basterà dimostrare che dalle ipts. $\delta_{i,l} = \delta_{i+1,2l}$ e $\delta_{i,l-1} = \delta_{i+1,2l-2}$ nasce che $\delta_{i,l+1} = \delta_{i+1,2l+2}$. Ora, poi che in Ipts. abbiamo che $\delta_{i+1,2l} = \delta_{i+1,2l-2}/\delta_{i+1,2l-1}$, $\delta_{i+1,2l+1} = \delta_{i+1,2l-1}/\delta_{i+1,2l}$, e $\delta_{i+1,2l+2} = \delta_{i+1,2l}/\delta_{i+1,2l+1}$, bisognerà che $\delta_{i+1,2l+2}$ coincida con $\delta_{i+1,2l-2}/\delta_{i+1,2l}$: visto

che se fra i punti U, V, X, Y, Z intercedono le relazioni V = U|X, X = V|Y e Y = X|Z, la simmetria rispetto ad X, in quanto scambia fra loro i due punti V ed Y tenendo fermo X, dovrà permutare l'un l'altro anche i punti X/V ed X/Y, vale a dire U e Z: onde X = U|Z. Ma per il supposto induttivo $\delta_{i+1,2l-2}/\delta_{i+1,2l} = \delta_{i,l-1}/\delta_{i,l}$: dunque $\delta_{i+1,2l+2} = \delta_{i,l-1}/\delta_{i,l} = \delta_{i,l+1}$, c. d. d.].

P 25 — *Tr.* « La classe dei punti $\delta_{i,l}$, presi nell'ordine in cui va crescendo il numero $l:2^i$, risulta ordinata nel senso A → B ». [Invero da $l:2^i < l':2^{i'}$ e secondo che $i < i'$, o $i = i'$, o $i > i'$, si deduce rispettivamente $l \cdot 2^{i'-i} < l'$, $l < l'$, $l < l' \cdot 2^{i-i'}$. Ma nel primo caso il punto $\delta_{i,l}$ coinciderà col punto $\delta_{i',l \cdot 2^{i'-i}}$ e nel terzo caso il punto $\delta_{i',l'}$ col punto $\delta_{i,l' \cdot 2^{i-i'}}$ (P 24): dunque il punto $\delta_{i',l'}$ sarà sempre un $\sigma_{A,B}^{\cdot}\,\delta_{i,l}$ (P 21)].

P 26 — *Tr.* « Se, per qualunque valore (intero e positivo o nullo) degli indici i ed l si coordina al punto $\delta_{i,l}$ (P 18 § 4) la frazione $l:2^i$; e, viceversa, a ciascun numero razionale (positivo o nullo) del tipo $l:2^i$ il punto $\delta_{i,l}$; nasce una corrispondenza perfetta (univoca e reciproca) tra la classe dei punti medio-simmetrici di A, B verso A e quella delle frazioni ordinarie, il cui denominatore è una potenza del 2 (cioè dei numeri rappresentabili, sotto forma finita, con le due sole figure della numerazione binaria) ». [Dalla dfnz. stessa dei punti medio-simmetrici (P 18 § 4) e dalle P 42, 44 § 1 è palese, che due numeri interi (positivi o nulli) i ed l, tutto che dati ad arbitrio, spettano sempre ad un punto di detta classe in qualità di primo e secondo indice; e come tali non possono mai appartenere a più punti diversi. Inoltre se per le coppie di numeri (i, l) ed (i', l') come sopra sussisterà l'eguaglianza $l:2^i = l':2^{i'}$, bisognerà che i due punti $\delta_{i,l}$ e $\delta_{i',l'}$ coincidano; visto che i punti $\delta_{i,l}, \delta_{i+1,2l}, \delta_{i+2,2^2 l}, \ldots \delta_{i',2^{i'-i} l}$ (se $i < i'$), ovvero i punti $\delta_{i',l'}, \delta_{i'+1,2l'}, \delta_{i'+2,2^2 l'}, \ldots \delta_{i,2^{i-i'} l'}$ (se $i > i'$) si confondono tutti in un solo (P 24). E se per contrario $l:2^i \lesseqgtr l':2^{i'}$, anche i punti $\delta_{i,l}$ e $\delta_{i',l'}$ saranno diversi fra loro, grazie a P 25 e P 1. Ecc., ecc.].

P 27 — *Df.* « Sempre che A, B siano punti e A diverso da B, per "*ascissa* di un punto X qualsivoglia di AB, rispetto ad A come *origine* e a B come *punto unità*" — ovvero 'rispetto ad (A, B)' senz'altro — s'intende: 1) il numero $l:2^i$, se X appartiene alla classe dei punti medio-simmetrici di A, B verso A (P 18 § 4); 2) il limite per $n = \infty$ delle frazioni ordinarie decrescenti $l_0/2^{i_0}$, $l_1/2^{i_1}, l_2/2^{i_2}, \ldots l_n/2^{i_n}, \ldots$ già contemplate in P 23 e subordinate a ciascun punto di |AB (ivi), se X appartiene alla semiretta A per B, ma non alla classe dei punti $\delta_{i,l}$; 3) il numero $-x'$, se X non appartiene ad |AB, ed x' sia l'ascissa del suo simmetrico rispetto ad A (ved. P 36 § 3) ». — I numeri $l_0/2^{i_0}, l_1/2^{i_1}, l_2/2^{i_2}, \ldots$ sono le ascisse dei punti $\delta_{i_0,l_0}, \delta_{i_1,l_1}, \delta_{i_2,l_2}, \ldots$, che — giusta una legge assegnata in P 23 — costituiscono una progressione discendente rispetto al senso A → B, e avente X per limite inferiore. — Osservate, che anche il punto $\delta_{i,l}$ (gl'indici i ed l essendo dati a piacere) può sempre aversi come limite inferiore d'una progressione sì fatta (P 23); e che in tal caso il limite delle frazioni $l_n:2^{i_n}$ per $n = \infty$ eguaglia precisamente l'ascissa del punto stesso, cioè la frazione $l:2^i$. [Invero, se p. es. il $\lim\limits_{n=\infty} \frac{l_n}{2^{i_n}}$, che chiameremo h, fosse minore di

$l:2^i$, qualche numero della serie decrescente $l_0:2^{i_0}, l_1:2^{i_1}, \ldots, l_n:2^{i_n}, \ldots$ — p. es. $l_m:2^{i_m}$ — dovrebb'esser compreso fra h ed $l:2^i$; dunque il punto δ_{i_m, l_m}, spettante alla progressione onde si parla, precederebbe (nel senso $A_* \rightarrow B$) il limite inferiore $\delta_{i,l}$ di questa (P 25), contro P 19. E se per l'opposto $l:2^i$ fosse minore di h, allora, presa a piacer la frazione ordinaria $p:2^q$ in maniera, che $l/2^i < p/2^q < h$, il punto $\delta_{p,q}$ dovrebbe seguire il punto $\delta_{i,l}$ e precedere i punti δ_{i_n, l_n}, qualunque sia n (P 25): cosicchè nessun punto della progressione $\delta_{i_0, l_0}, \delta_{i_1, l_1}, \ldots, \delta_{i_n, l_n}, \ldots$ giacerebbe fra il limite inferiore $\delta_{i,l}$ e il punto $\delta_{p,q}$ (P 10), contro P 19]. — È altresì manifesto che « Se per effetto d'una similitudine i punti A, B, X verranno in A′, B′, X′, l'ascissa del punto X rispetto ad (A, B) sarà uguale all'ascissa del punto X′ rispetto ad (A′, B′) ». — In questo modo a ciascun punto X della AB corrisponde un certo numero reale (l'ascissa di X) positivo, negativo, o nullo: e così la retta AB si rappresenta univocamente sulla classe dei numeri reali e finiti. Il valore *zero* dell'ascissa spetta all'origine A di |AB, il valore *uno* al punto B; i numeri *due, tre, quattro*,... saranno le ascisse di A/B e degli ultrasimmetrici A_3, A_4,... di A rispetto a B (P 16 § 4); ecc. — Se non che dai principî svolti sin qui — cioè dalle sole premesse I-XXIII — non appare che l'anzidetta rappresentazione numerica sia conversiva o reciproca nelle due classi ' AB ' e ' numero reale finito ': vale a dire che ciascun numero reale e finito, tutto che dato ad arbitrio, sia sempre ascissa d'un qualche punto di AB. È questo un fatto, che risulterà dal princ. XXIV ed ultimo. Ma la rappresentazione onde si parla è senza fallo isomorfa; ossia non potrà coordinare un medesimo numero (razionale o irrazionale) a due punti diversi. In altri termini:

P **28** — *Tr.* « Sotto la stessa Ipts., le ascisse che spettano a punti diversi di « AB sono sempre diverse fra loro ». [Dopo ciò che si è visto in P 25, 27 basterà dimostrare, che se due punti non coincidenti I ed I′ son limiti inferiori di due progressioni discendenti rispetto al senso A → B:

$$\eta)\ \delta_{i_0, l_0}, \delta_{i_1, l_1}, \delta_{i_2, l_2}, \ldots \delta_{i_n, l_n}, \ldots \quad e \quad \eta')\ \delta_{i'_0, l'_0}, \delta_{i'_1, l'_1}, \delta_{i'_2, l'_2}, \ldots \delta_{i'_n, l'_n}, \ldots$$

costruite a tenore di P 23, non potrà darsi che le due serie numeriche decrescenti:

$$\epsilon)\ \frac{l_0}{2^{i_0}}, \frac{l_1}{2^{i_1}}, \frac{l_2}{2^{i_2}}, \ldots \frac{l_n}{2^{i_n}}, \ldots \quad ed \quad \epsilon')\ \frac{l'_0}{2^{i'_0}}, \frac{l'_1}{2^{i'_1}}, \frac{l'_2}{2^{i'_2}}, \ldots \frac{l'_n}{2^{i'_n}}, \ldots$$

abbian per limite uno stesso numero λ. Invero — posto che I (ad es.) preceda I′ nel senso A → B (P 4) — fra questi due punti dovrà cader qualche punto di η), p. es δ_{i_m, l_m} (P 19). Ora un tal punto precederà tutti i punti della η') (P 5); e però la frazione $l_m:2^{i_m}$ sarà minore di ognuna delle frazioni ϵ') (P 25); dunque minore od eguale al limite verso cui tendono per $n = \infty$. Cosicchè questo limite, come maggiore od eguale ad $l_m:2^{i_m}$, sarà certamente maggiore del limite verso cui tendono le altre frazioni decrescenti ϵ). Ecc.]. — Anzi abbiamo così dimostrato un teorema più generale, cioè:

P **29** — *Tr.* « E l'ascissa d'un punto arbitrario di AB (rispetto ad A come

« origine e a B come punto unità) è minore o maggiore di quella di un « altro punto di AB, secondo che il primo precede o segue il secondo nel senso « A → B ». — E in modo simile a questo si proverebbe che, se il medesimo punto I si offre eziandio come limite superiore o inferiore di qualche altra progressione, ascendente o discendente, $\delta_{i''_0, l''_0}, \delta_{i''_1, l''_1}, \delta_{i''_2, l''_2}, \ldots \delta_{i''_n, l''_n}, \ldots$ benchè al tutto diversa da η) e non conforme alla legge assegnata in P 23; ciò non di meno la serie numerica crescente o decrescente $l''_0 : 2^{i''_0}, l''_1 : 2^{i''_1}, l''_2 : 2^{i''_2} \ldots l''_n : 2^{i''_n}, \ldots$ nelle ascisse corrispondenti a quei punti avrà sempre, per $n = \infty$, lo stesso limite che spetta alla serie e) (P 28).

P 30 — *Df.* « Essendo X, Y punti arbitrari, purchè diversi fra loro, e u un « segmento prestabilito a piacere, che non si restringa in un punto; la frase "*distanza di* Y *da* X *secondo u*" (come 'unità di misura') — simboleggiata in '$\mathrm{dst}_u(X, Y)$' — sta invece di ascissa del punto Y rispetto ai punti « X ed U, dove U sia quel punto del raggio |XY, per cui succede che |XU| è « congruo con u (P 41 § 4, P 37 § 3). Ma se i punti X ed Y coincideranno in un « solo, allora $\mathrm{dst}_u(X, Y)$ varrà per dfn. lo *zero*, qualunque sia u ». — Se un'isomeria qualsivoglia traduce i punti X ed Y rispettivamente in X′ e Y′, la distanza di Y′ da X′, presa rispetto ad u, sarà sempre uguale a $\mathrm{dst}_u(X, Y)$, qualunque sia u: per la qual cosa $\mathrm{dst}_u(X, Y) = \mathrm{dst}_u(Y, X)$. Così è che — una volta assegnata quell'unità di misura u (e perciò anche la classe dei segmenti congrui ad u) — ha un valore preciso la locuzione « mutua distanza dei punti X, Y », o '*lunghezza* del segmento |XY|'; in cui si dovrà senza più riconoscere un'invariante simmetrico di questi punti rispetto a qualunque isomeria. Anzi la P 28 fa fede che segmenti 'congrui fra loro' e segmenti di 'egual lunghezza' è tutt'uno.

P 31 — *Tr.* « Nell'anzidetta Ipts., se un punto Z appartiene al segmento |XY|, « fra le distanze dei punti X, Y, Z intercede la relazione '$\mathrm{dst}_u(X, Z) + \mathrm{dst}_u(Z, Y)$ « $= \mathrm{dst}_u(X, Y)$' ». [In primo luogo suppongasi, che il punto Z appartenga alla classe dei medio-simmetrici di X, U verso X — p. es $Z = \delta_{i,l}$ (P 18 § 4) — e che il simile avvenga del punto Y rispetto ai punti Z ed U′ — premesso che U′ giace in |ZY, come U in |XZ, per modo che tanto |ZU′|, quanto |XU|, siano congrui con u — cioè che $Y = \delta'_{i',l'}$, la lettera δ' indicando i medio-simmetrici di Z, U′ verso Z: onde avremo che $\mathrm{dst}_u(X, Z) = l : 2^i$, e $\mathrm{dst}_u(Z, Y) = l' : 2^{i'}$ (P 30, 27). Inoltre sia p. es. $i > i'$: onde $Y = \delta'_{i, 2^{i-i'} \cdot l'}$ (P 24). Ora la traslazione d'X in Z (P 35 § 6), spostando |XZ in |ZY (P 11, ecc.) e p. cons. U in U′, convertirà l'i-esimo punto ipermedio di X, U verso X nell'i-esimo punto ipermedio di Z, U′ verso Z, cioè $\delta_{i,1}$ in $\delta'_{i,1}$; onde la traslazione di X in $\delta_{i,1}$ farà passar Z in $\delta'_{i,1}$, e però $\begin{Bmatrix}\delta_{i,1}\\ X\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta'_{i,1}\\ Z\end{Bmatrix}$ (P 36 § 6). D'altra parte $\begin{Bmatrix}X\\ Z\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta_{i,1}\\ X\end{Bmatrix}^l$ e $\begin{Bmatrix}Y\\ Z\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta'_{i,1}\\ Z\end{Bmatrix}^{2^{i-i'} \cdot l'}$ (P 18 § 4, P 39 § 6). Dunque $\begin{Bmatrix}Y\\ X\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta_{i,1}\\ X\end{Bmatrix}^{l + 2^{i-i'} \cdot l'}$, e per conseguenza $Y = \delta_{i, l + 2^{i-i'} \cdot l'}$ (P 18 § 4): ossia (P 30) $\mathrm{dst}_u(X, Y) = (l + 2^{i-i'} \cdot l') : 2^i = (l : 2^i) + (l' : 2^{i'}) =$ $\mathrm{dst}_u(X, Z) + \mathrm{dst}_u(Z, Y)$, c. v. d. — Di poi supponiamo che il punto Y sia dato come limite inferiore d'una progressione discendente $\delta'_{i'_0, l'_0}, \delta'_{i'_1, l'_1}, \delta'_{i'_2, l'_2},$

$, \ldots \delta'_{l'_n, l'_n}, \ldots$ (P 23); di guisa che $dst_u (Z, Y)$ venga ad essere il limite delle frazioni ordinarie $l'_0 : 2^{l'_0}, l'_1 : 2^{l'_1}, l'_2 : 2^{l'_2}, \ldots l'_n : 2^{l'_n}, \ldots$ per $n = \infty$ (P 30, 27). Allora, se poniamo per brevità $Y_n \equiv \delta'_{l'_n, l'_n}$, avremo per dimostrato che $dst_u (X, Z) + l'_n : 2^{l'_n} = dst_u (X, Y_n)$ qualunque sia n, dove il secondo membro è l'ascissa del punto Y_n rispetto ad X come origine e ad U come punto unità (P 30); e passando al limite per $n = \infty$ si otterrà da una parte la somma $dst_u (X, Z) + dst_u (Z, Y)$, e dall'altra l'ascissa del punto limite Y rispetto ai punti X ed U (P 27), vale a dire il numero $dst_u (X, Y)$. — Appresso viene l'ipts., che il punto Z sia dato come limite inferiore d'una progressione discendente $\delta_{i_0, l_0}, \delta_{i_1, l_1}, \delta_{i_2, l_2}, \ldots \delta_{i_n, l_n}, \ldots$; restando X, Y nelle condizioni testè accennate. Si può conceder che il punto δ_{i_m, l_m} e i suoi successivi giacciano tutti fra X ed Y: per la qual cosa è certo che, da m in poi, $dst_u (X, Z_n) + dst_u (Z_n, Y) = dst_u (X, Y)$, se per Z_n intendiamo il punto δ_{i_n, l_n}. Onde — passando il limite per $n = \infty$ — si dedurrà come dianzi $dst_u (X, Z) + dst_u (Z, Y) = dst_u (X, Y)$; visto che $dst (Z_n, Y) = dst (Y, Z_n)$, qualunque sia n, e che $dst (Y, Z) = dst (Z, Y)$. — Resta il caso che X si presenti come punto limite: ma ormai supplisce il Lettore].

P 32 — *Tr.* « Nell'Ipts. di P 16 § 4, la distanza dei punti A e A_i sarà multipla secondo i della distanza di A_1 da A, qualunque sia l'unità di misura ». [Abbiamo da P 31 $dst (A, A_2) = 2\, dst (A, A_1)$, e $dst (A, A_i) = dst (A, A_{i-1}) + dst (A, A_1)$; dal momento che $A_1 \varepsilon |AA_2|$, $A_{i-1} \varepsilon |AA_i|$, e $dst (A, A_1) = dst (A_1, A_2) = dst (A_{i-1}, A_i)$ (P 16 § 4, P 30). Onde il Tr. è vero per $i = 1, 2$; e supposto vero per $i = n$-1, sarà vero altresì per $i = n$. Ecc.].

P 33 — *Tr.* « Sempre che A, B siano punti distinti, se B' è un seguente B « nel senso $A \to B$, l'ascissa di qualunque punto del raggio |AB rispetto ad A « come origine e a B come punto unità sarà sempre maggior che l'ascissa dello « stesso punto rispetto ad (A, B') ». [Basterà che il Tr. si provi in ordine ai punti medio-simmetrici di A, B verso A. Ora indicando con $\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_i, \ldots$ i successivi punti ipermedî di A, B' verso A, il punto δ_1 precederà senza fallo il punto δ'_1 nel senso $A \to B$ (P 14 § 4, P 2-4, 6, ecc.); e, per la stessa ragione, il punto δ_2 dovrà precedere al punto $\delta'_2, \ldots$ e il punto δ_i al punto δ'_i (Induct.). Dunque l'ascissa del punto δ_i, rispetto ad A come origine e a B' come punto unità, sarà minore di $1 : 2^i$ (P 29); e l'ascissa del punto $\delta_{i,l}$, essendo l volte maggiore di quella che spetta a $\delta_{i,1}$ (P 32, 30), sarà dunque minore di $l : 2^i$, cioè dell'ascissa, che lo stesso punto ha rispetto ad (A, B). Ecc.].

P 34 — *Tr.* « Cambiare il punto unità sulla retta, tenendo ferma l'origine (P 27), equivale a divider l'ascissa di ciascun punto per quella del nuovo « punto unità ». In altri termini, se β è l'ascissa d'un punto B' rispetto agli A e B (sempre che questi punti A e B non coincidano e B' sia punto di AB, diverso anch'esso da A) fra le ascisse x ed x' di un medesimo punto X di AB (qual ch'esso sia), prese l'una rispetto ad A e B, l'altra rispetto ad A e B', (P 27) intercede la relazione $x' = x : \beta$. [Distingueremo per mezzo di un apice i punti medio-simmetrici di A, B' verso A, da quelli di A, B verso A. — Grazie a ciò che precede, basterà che il Tr. si provi sotto l'ipts. che il punto X appartenga ai medio-simmetrici di A, B verso A: ad es. per $X \equiv \delta_{i,l}$ (P 18 § 4). 1) E in primo luogo si

supporrà che B' sia un punto ipermedio di A, B verso A; p. es. il punto $\delta_{h,1}$, di ascissa $\beta = 1 : 2^h$ rispetto ad (A, B) (P 27). Allora — se $i \leq h$ e p. c. $\delta_{i,l} = \delta_{h,2^{h-i}l}$ (P 24) — mentre il punto $\delta_{h,1}$ diventa $\delta'_{0,1}$, il punto $\delta_{h,2^{h-i}l}$ si converte necessariamente in $\delta'_{0,2^{h-i}l}$ per effetto della sostituzione di B' a B: onde $x' = 2^{h-i} . l = (l : 2^i) : (1 : 2^h) = x : \beta$. E se per l'opposto $i > h$, ognun vede che il punto ipermedio δ_i si confonde col punto ipermedio δ'_{i-h}, e però $\delta_{i,l}$ con $\delta'_{i-h,l}$; sicchè $x' = l : 2^{i-h} = x : \beta$, come dianzi. — 2) Appresso poniamo che il punto B' sia il $(k-1)$-esimo fra gli ultrasimmetrici di A rispetto a B (P 16, 17, § 4); vale a dire il punto $\delta_{0,k}$. di ascissa $\beta = k$ rispetto ad (A, B). Risulta da P 32 (qualunque sia l'unità di misura) che dst $(A, \delta_{0,k}) = k$ dst $(A, \delta_{0,1})$; e che similmente (avuto riguardo a P 17, 18 § 4) dst $(A, \delta_{0,1}) = 2^i$. dst $(A, \delta_{i,1})$: per la qual cosa dst $(A, B') = k . 2^i$. dst $(A, \delta_{i,1})$. Di qui, tolto |AB'| come unità di misura (P 30), $1 = k . 2^i . \mathrm{dst}_{|AB'|} (A, \delta_{i,1})$. Dunque l'ascissa del punto $\delta_{i,1}$ rispetto ai punti A e B' viene ad essere uguale ad $1 : (k . 2^i)$ (Ivi), e quella del punto $\delta_{i,l}$ risulta $l : (k . 2^i)$ (P 32). Dunque $x' = (l : 2^i) : k = x : \beta$. — 3). Ciò premesso, se avvien che B' coincida con uno qualsiasi dei punti medio-simmetrici di A, B verso A — per es. col punto $\delta_{h,k}$ di ascissa $\beta = k : 2^h$ — basterà che B si trasferisca prima in $\delta_{h,1}$ e poscia in $\delta_{h,k}$. Per ciò che abbiam visto in 1) e 2), il primo cangiamento avrà per effetto di moltiplicare l'ascissa x del punto X per 2^h, mentre il secondo farà divider per k l'ascissa $2^h . x$ così alterata: onde $x' = x : (k : 2^h) = x : \beta$. — 4) Resta il caso, che B' sia limite inferiore d'una progressione discendente $\delta_{h_0, k_0}, \delta_{h_1, k_1}, \delta_{h_2, k_2}, \ldots \delta_{h_n, k_n}, \ldots$ a tenore di P 23. Pongasi $B'_n = \delta_{h_n, k_n}$ e $\beta_n = k_n : 2^{h_n}$ (qualunque sia l'indice n); onde $\beta = \lim_{n=\infty} (k_n : 2^{h_n}) = \lim_{n=\infty} \beta_n$ (P 27), β essendo l'ascissa del punto B' rispetto ad (A, B) come dianzi; e con x'_n si rappresenti l'ascissa del punto X rispetto ad (A, B'_n). Avremo, per ciò che si è dimostrato in 3), $x'_0 = x : \beta_0$, $x'_1 = x : \beta_1, \ldots x'_n = x : \beta_n, \ldots$; e il limite di queste frazioni (crescenti insieme con n) per $n = \infty$ sarà uguale ad $x : \beta$. Or se l'ascissa x' di X rispetto ad (A, B') fosse minore di questo limite, nell'intervallo fra i numeri x' e $x : \beta$ vi sarebbe per certo una qualche frazione x'_m relativa ad un punto B'_m della progressione anzidetta: il che non può darsi, atteso che il punto B' precede ogni punto di questa nel senso A → B (P 19), e per cons. x' è maggiore di x'_n, qualunque sia n (P 33, 8). E se x' fosse maggior di quel limite, preso un punto — che chiamerò B'' — tra i medio-simmetrici di A, X verso A, al quale competa, rispetto ad A come origine e ad X come punto unità, un'ascissa compresa fra i numeri $1 : x'$ e $\beta : x$ (com'è sempre possibile); la frazione reciproca di quest'ascissa — vale a dire, per quanto è gia stabilito in 3), l'ascissa x'' del punto X rispetto ad (A, B'') — sarebbe minore di x' e maggiore di $x : \beta$, e però B'' seguente a B' nel senso A → B (P 33, 8, 4, ecc.): di guisa che fra B' e B'' dovrebbe giacer qualche punto della progressione $B'_0, B'_1, B'_2, \ldots B'_n, \ldots$, ad es. B'_m; onde $x'' < x'_m$ (P 33, 8, ecc.). Ma $x'_m < x : \beta$; dunque $x'' < x : \beta$, e questo è contradditorio. Pertanto $x' = x : \beta$. 5) Infine, se il punto B' non appartiene ad |AB; allora, posto $B'_1 = B'/A$, l'ascissa di X rispetto ad (A, B'_1) sarà uguale ad $x : -\beta$, β essendo anche qui l'ascissa del punto B' e però $-\beta$ l'ascissa di B'_1 rispetto ad (A, B).

Ma lo stesso numero $x : -\beta$ esprime anche l'ascissa del punto X/A rispetto ad (A , B′) (P 27); dunque il numero opposto, cioè la frazione $x : \beta$, sarà l'ascissa di X rispetto ad (A , B′) (Ivi)].

P 35 — *Tr.* « Se, essendo A , B , C tre punti non collineari, la retta che unisce « due punti D ed E situati rispettivamente sui lati |AB|, |AC| del triangolo (e di- « versi fra loro) sia parallela al terzo lato, avrà luogo la proporzione: dst (A , B) : « dst (A , D) = dst (A , C) : dst (A , E) = dst (B , C) : dst (D , E), qualunque sia l'unità « di misura ». Eucl., lib. 6°, prp. II. [Se i due raggi |AB , |AC si riferiscon tra loro punto per punto in maniera, che due punti omologhi quali che siano giacciano sempre sopra una retta parallela a BC (o coincidente con questa), e se U , V siano due punti omologhi scelti a piacere (pur che diversi da A); le ascisse dei punti B e D rispetto ad (A , U) saranno eguali alle ascisse dei punti C ed E (omologhi a quelli) rispetto ad (A , V): atteso che da P 24 § 6 e Induct. si deduce, che l'i-mo punto ipermedio di A , U verso A corrisponde all'i-mo punto ipermedio di A , V verso A, e che sono omologhi ancora due punti medio-simmetrici delle due classi ogni volta, che gl'indici non differiscon dall'uno all'altro (P 27). Or, se V′ è quel punto di |AC, che dista da A quanto U, e sia tolto V′ in vece di V come punto unità, le nuove ascisse dei punti C ed E saranno eguali alle antiche, divise ciascuna per l'ascissa del punto V′ rispetto ad (A , V) (P 34): per la qual cosa, detti u e v i segmenti |AU|, |AV|, si avrà (P 30):

$$\mathrm{dst}_u (A , B) : \mathrm{dst}_u (A , D) = \mathrm{dst}_v (A , C) : \mathrm{dst}_v (A , E) = \mathrm{dst}_u (A , C) : \mathrm{dst}_u (A , E)$$

Appresso si effettui la traslazione di D in B, per la quale E si trasferisce in un certo punto F di BC ed A in un certo punto G di AB: onde FG parallela ad EA, e le coppie (A , D), (D , E) congruenti alle coppie (G , B), (B , F) (P 35, 36, 38 § 6). Anzi il punto F, avendo rispetto a (B , C) la medesima ascissa di E rispetto ad (A , C), sarà interno a |BC| (P 10, 29); e così G interno a |BA|. Dunque, per quanto si è visto or ora « dst (B , A) : dst (B , G) = dst (B , C) : dst (B , F) ». Ma dst (B , G) = dst (A , D), e dst (B , F) = dst (D , E) (P 30); per la qual cosa: dst_u (A , B) : dst_u (A , D) = dst_u (B , C) : dst_u (D , E); ecc.].

P 36 — *Tr.* « E se, viceversa, dai raggi |AB , |AC si staccheranno i segmenti « |AH|, |AK|, le cui lunghezze (non nulle) sian proporzionali a dst (A , B) e « dst (A , C), la retta HK sarà parallela alla retta BC ». Eucl., lib. 6°, prp. II. [Se HK non è parallela a BC, nel raggio |AC vi sarà nondimeno un punto K′, per cui la retta HK′ è parallela a BC (P 6 § 6, ecc.): dunque tale che « dst_u (A , B) : dst_u (A , H) = dst_u (A , C) : dst_u (A , K′) (P 35, ecc.) ». Ma per Ipts. « dst_u (A , B) : dst_u (A , H) = dst_u (A , C) : dst_u (A , K) (P 30): dunque dst_u (A , K′) = dst_u (A , K). Onde i punti K e K′, benchè diversi fra loro, avrebbero ascisse uguali rispetto ad A come origine e a V′ come punto unità (P 30): il che non può stare (P 28)].

P 37 — *Tr.* « In qualsivoglia similitudine è costante il rapporto delle lun- « ghezze di due segmenti omologhi. Ved. P 30 ». [Grazie a P 33 § 6, basterà che il Tr. si stabilisca in ordine all'omotetia $\left\{ O \begin{matrix} A' \\ A \end{matrix} \right\}$ (P 28 § 6), dove O , A , A′ son punti

collineari e distinti, anzi A' appartiene ad |OA. Ma in questo caso risulta da P 35, che le lunghezze di due segmenti omologhi quali che siano stanno fra loro nel rapporto dst (O, A) : dst (O, A')].

P 38 — *Tr.* « Se gli angoli Â . BC, B̂ . CA d'un triangolo |ABC| sono congrui « rispettivamente agli angoli D̂ . EF, Ê . FD di un altro triangolo |DEF|, le lun- « ghezze dei lati |AB|, |BC|, |CA| del primo saranno proporzionali a quelle dei lati « |DE|, |EF|, |FD| del secondo ». Eucl., lib. 6°, prp. IV. [Per Ipts. esiste un'isomeria che sovrappone l'angolo D̂ . EF all'angolo A . BC, traducendo D in A, e i punti E, F in due punti E', F' dei raggi |AB, |AC rispettivamente. E poichè, grazie a P 19 § 5, P 4 § 6, ecc., la retta E'F' risulterà parallela a BC (seppur non coincida con questa), si ritorna a P 35. — Per la prps. reciproca si può argomentar come Eucl. al luogo cit.]. —Del resto, ciascuna di queste P 37 e P 38 è conseguenza dell'altra in virtù delle P 31, 34, § 6.

Dagli ultimi fatti sarebbe agevol cosa dedurre — presenti i §§ 1-6 — quasi tutte le prps.[t] del lib. VI (non che dei lib. I-IV, come il Tr. di Pitagora, ecc.) e quelle che ne derivano: intese per altro come *relazioni numeriche* fra le mutue distanze di tre o più punti dati. Nè può rimanere alcun dubbio circa la possibilità di svolgere tutta quanta l'ordinaria Geometria Elementare dai soli principî I-XXIII; perchè in ordine all'*equivalenza* delle figure, alla *misura* delle aree e dei volumi, ecc. siamo liberi ormai di seguire, in tutto od in parte, le vie tracciate da F. Schur (¹), Rausenberger (²), L. Gérard (³), G. Veronese (⁴), D. Hilbert (⁵); con facoltà di appellarci alla misura delle *distanze* (P 30, 31, ecc.). Onde la Geometria Elementare — come Geometria 'del compasso', ovvero dei punti che si rispecchian nel campo numerico Euclidiano (⁶) — si palesa anche qui indipendente dalla *continuità* della retta nell'accezione di G. Cantor (⁷), e in quella più comprensiva di R. Dedekind (⁸) ed H. Weber (⁹). — Ma la necessità di qualche nuovo principio si fa innanzi ogni volta che ci proviamo a invertire la rappresentazione della 'retta' sul 'numero reale', qual'è definita in P 27: vale a dir se si vuole ch'esistano punti, la cui distanza da un punto dato, secondo una data unità di misura, eguagli un numero prestabilito a piacere. Dopo quanto precede, il modo più naturale di giungere a questa inversione — o, come suol dirsi, a *distender* la variabile numerica reale (escluso il valore 'infinito') sopra una retta arbitraria, così da ottenere una corrispondenza perfetta fra i

(¹) Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher Gesellschaft, Jahrg. 1892.

(²) Math. Annal., XLIII, 1893.

(³) Bull. de la Soc. Math. de France, XXIII, 1895.

(⁴) Atti del R. Ist. Veneto, VI-VII, 1894-95.

(⁵) Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal, Göttingen, 1899. — Vedi anche G. B. Halsted, *Rational Geometry*, New-York, 1904 (Chap. X, XII).

(⁶) G. Castelnuovo. '*Sulla risoluzione dei problemi geometrici*, ecc.' in « Questioni di Geometria Elementare raccolte da F. Enriques ». Bologna, 1900.

(⁷) '*Beiträge z. Begründ. d. transfin. Mengenlehre*', Math. Annal. XLVI, 1895.

(⁸) '*Stetigkeit u. irration. Zahlen*', 1872.

(⁹) '*Algebra*', 1898 (vol. I, cap. 4-12).

punti di questa e la classe dei numeri reali e finiti — sarà di accettare il seguente:

Postulato XXIV.

P 39. — *Sempre che* A *e* B *siano punti,* A *diverso da* B*; qualsivoglia progressione* $\delta_{i_0,l_0}, \delta_{i_1,l_1}, \delta_{i_2,l_2}, \ldots \delta_{i_m,l_m}, \ldots$ *discendente rispetto al senso* A → B*, che si può istituir nella classe dei punti medio-simmetrici di* A , B *verso* A*, possiede un limite inferiore.* Ved. P 18 § 4, P 19.

P 40 — *Tr.* « E data a piacer sulla retta una progressione ascendente, o « discendente, rispetto al senso A → B, esiste sempre per essa un limite superiore, o inferiore; purchè tutti i suoi punti precedano, o seguano, un « medesimo punto di AB ». [Si può conceder che la progressione $|E_n| \equiv E_0, E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ onde si parla sia discendente; perchè — detto F quel punto, che per Ipts. segue, o precede, tutti i suoi punti; e posto (qualunque sia l'indice i) $E'_i \equiv E_i/F$ — la serie $|E'_n| \equiv E'_0, E'_1, E'_2, \ldots E'_n, \ldots$ è una progressione in senso contrario alla prima (P 11, 19): e se l'una avrà un punto limite, bisognerà che il simmetrico rispetto ad F sia punto limite dell'altra. Ancora si può conceder che la progressione $|E_n|$ giaccia tutta nel raggio |AB: se no, basterebbe sostituire ad $|E_n|$ la progressione, eziandio discendente, $|E''_n|$, che nasce da $|E_n|$ in virtù della traslazione di F in A (P 11, 19). — Ora in più modi si può trovar nella classe dei punti medio-simmetrici di A , B verso A una progressione $|\delta_{i_m,l_m}|$ compenetrante $|E_n|$; tale cioè, che fra punti consecutivi d'una qualunque di esse giaccia sempre alcun punto dell'altra; di guisa che il limite inferiore dell'una o dell'altra (ove esista) sia tale necessariamente per tutte e due: ma qui basta usar della regola che assegnammo in P 23; indi invocare sulla progressione normale $|\delta_{i_m,l_m}|$ il principio XXIV (P 39)]. — Il Lettore può constatar facilmente che — detta η_n l'ascissa del punto E_n rispetto ad (A , B) — le due serie numeriche $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_m, \ldots$ ed $l_0 : 2^{i_0}$, $l_1 : 2^{i_1}, \ldots l_m : 2^{i_m}, \ldots$ avranno necessariamente uno stesso limite finito, per $n = \infty$; e che pertanto le ascisse dei punti d'una progressione arbitraria come sopra tendono sempre all'ascissa del punto limite. Ecc.

P 41 — *Tr.* « Qualunque numero reale e finito sarà sempre l'ascissa d'un punto « determinato ed unico (della retta AB) rispetto ad A come origine e a B come « punto unità ». [Invero ciascun numero reale positivo e, tutto che dato ad arbitrio, si può sempre aver come limite, per $n = \infty$, d'una serie di frazioni razionali $e_1 : \varepsilon_1, e_2 : \varepsilon_2, \ldots e_n : \varepsilon_n, e_{n+1} : \varepsilon_{n+1}, \ldots$, con e_n, ε_n interi positivi ed $e_n : \varepsilon_n$ minore di $e_{n+1} : \varepsilon_{n+1}$, qualunque sia n. Ora in più modi si può costruire una serie numerica del tipo $l_1 : 2^{i_1}, l_2 : 2^{i_2}, \ldots l_n : 2^{i_n}, l_{n+1} : 2^{i_{n+1}}, \ldots$, con i_n, l_n interi positivi ed $i_n : 2^{i_n}$ minore di $i_{n+1} : 2^{i_{n+1}}$ qualunque sia n, che abbia per $n = \infty$ lo stesso limite e della prima: basterà, come dianzi, che l'n-esimo termine $l_n : 2^{i_n}$ della nuova serie sia, tra le frazioni ordinarie irriducibili della forma $l : 2^i$, che hanno valori compresi fra $e_n : \varepsilon_n$ ed $e_{n+1} : \varepsilon_{n+1}$, quella che rende minima la somma $i + l$, e minimo il numeratore l. D'altra parte sappiamo, che i numeri $l_1 : 2^{i_1}, l_2 : 2^{i_2}, \ldots l_n : 2^{i_n}$

,... sono precisamente le ascisse dei punti $\delta_{i_1, l_1}, \delta_{i_2, l_2}, \ldots \delta_{i_n, l_n}, \ldots$ (P 27); i quali perciò si offriranno ordinati, sul raggio |AB, secondo una progressione d i s c e n d e n t e rispetto al senso A → B (P 25), e tenderanno ad un limite (P 30) il quale avrà per ascissa il dato numero e (P 27). Che poi quest'ascissa non spetti a nessun altro punto di AB, si è già detto in P 28]. — Data ad arbitrio la progressione numerica crescente o decrescente $c_1 : \gamma_1, c_2 : \gamma_2, \ldots c_n : \gamma_n, \ldots$ — le c e γ essendo numeri interi positivi — un'altra serie numerica del tipo $\}l_n : 2^{i_n}\{$, che per $n = \infty$ ha sempre lo stesso limite di quella, sarebbe ad esempio $l_1 : 2^1, l_2 : 2^2, l_3 : 2^3, \ldots l_n : 2^n, l_{n+1} : 2^{n+1}, \ldots$; dove l_n sia il numero intero (positivo o nullo) determinato univocamente dalle condizioni $l_n : 2^n \leq c_n : \gamma_n < (l_n + 1) : 2^n$, vale a dire il massimo intero contenuto nel razionale $(c_n : \gamma_n) 2^n$. Se non che la serie dei punti $\delta_{1, l_1}, \delta_{2, l_2}, \ldots \delta_{n, l_n}, \ldots$ a cui si perviene con questa legge più semplice, non è sempre una p r o g r e s s i o n e giusta P 19.

APPENDICE

Nota 1ª. *Definire*, in senso lato, vuol dire circoscrivere e determinare un concetto per via di proposizioni o giudizî (Definizione '*reale*' od '*implicita*'): ma la *definizione* propriamente detta — definizione '*nominale*' od '*esplicita*' — non è altro per noi che "*imposizione di nome* a un gruppo qualsivoglia di parole o di segni"; o, se si vuole, un'*abbreviazione di linguaggio* (parlato o scritto) capace di rispecchiare od indurre una qualche *condensazione d'idee*. Data una frase, un'espressione o locuzione qualsiasi $F(a, b, \ldots; p, q, \ldots)$, composta di termini o segni parte logici [1], per es. $a, b, \ldots$, e parte *geometrici*, come $p, q, \ldots$; spesso ci converrà di adottare un solo termine o segno g, o una frase più semplice e più maneggevole G, per indicare e rappresentar nel discorso quel gruppo di segni e ciò ch'esso dinota od esprime: al che nulla si oppone, sempre che g e G sian termini o frasi attualmente sprovviste di contenuto geometrico. Una tal convenzione si stabilisce e si conferma scrivendo ad es.:

$$g \equiv F(a, b, \ldots; p, q, \ldots), \text{ ovvero } G \equiv F(a, b, \ldots; p, q, \ldots);$$

dove il segno '$\equiv$' è da legger '*significa*', oppure "*è uguale per definizione a*": e questa identità convenzionale è ciò che si chiama defnz. esplicita o nominale del termine g o della frase G. L'espressione $F(a, b, \ldots; p, q, \ldots)$ sarà il *definiente*, g o G il *definito*. Carattere essenziale della dfnz. è la facoltà di poter sostituire a piacere il definito al definiente, e viceversa: e per ciò (dal punto di vista formale) non importa nemmeno che sia esattamente conosciuto il valore dei termini geometrici $p, q, \ldots$; ma basta che il simbolo g o G scelto a rappresentare $F(a, b, \ldots; p, q \ldots)$ sia vergine di significato geometrico; ossia non esprima geometricamente qualcosa anche fuori della defnz. in parola [2].

Il più delle volte la dfnz. è retta da un'*ipotesi*; cioè le sta innanzi un cappello, dove si pongono alcune condizioni o restrizioni circa i concetti significati da $a, b, \ldots; p, q, \ldots$ Quest'ipts. è allora parte integrale della dfnz., e non dovrà mai separarsene; posto che la rappresentabilità di F per mezzo di g o G s'intenderà stabilita e concessa in quei soli casi, che l'ipts. stessa contempla e prevede.

Forse l'ufficio della dfnz., intesa come abbiam detto, parrà troppo modesto: eppur non è cosa da poco, se si riflette che la nostra ragione sarebbe addirittura impotente ad abbracciare, distinguere, ravvicinare, connettere, insomma a signoreggiar col discorso le idee più complicate ed astratte, senza il beneficio di poterle fissare ed evocare *ad libitum* per mezzo di semplici parole o di frasi molto concise,

[1] Termini logici saranno quelli che posson dirsi comuni a quasi tutte le scienze; e perciò formano come lo scheletro di qualsivoglia ragionamento, esprimendo idee per lo più necessarie e presenti a ogni sorta di operazioni intellettuali. Tali ad es. le formule '*esiste*', '*è un*', '*non è*', '*è conseguenza di*', '*corrisponde a*', ecc. Il senso loro dev'esser noto a chiunque ragiona; e conviene esser tutti d'accordo circa il valore da attribuire a quelle parole. Il discorso perderebbe ogni efficacia, o sarebbe addirittura impossibile, se fosse in noi menomata o distrutta la facoltà di liberamente appellarci a codeste nozioni (*costanti logiche*), il cui studio appartiene alla Logica

[2] Così p. es. il bambino, che ancor non intende tutto il valore dei termini 'marito' e 'moglie', può nondimeno imparare a servirsi utilmente della dfnz.: « Cognato » $\equiv$ « Fratello del marito o della moglie, o marito d'una sorella ».

anzi che attraverso il giro di lunghe perifrasi. Considerate ad es. quali e quanti fatti geometrici, quante relazioni e proposizioni son contemplate implicitamente e, per così dire, condensate, nella sola nozione di '*figure congruenti*'.

Nota 2ª. Molto giova all'intelligenza dei fatti geometrici l'aver sempre innanzi *un'immagine* o rappresentazione intuitiva del '*punto*' e della '*sfera* d'un punto intorno ad un altro'; ossia l'abito di contemplare il *senso* reale e concreto, che l'uso annette ai giudizî come " A , B , C sono punti, e C dista da A quanto B ". Se è vero che « nichil est in intellectu, quod non fuerit in sensu » (Aristotile) e che « ogni uman sapere ha principio dall'intuizione » (Kant) non sarà mai superfluo appellarsi anche ai mezzi più grossolani ed empirici per suscitare e vivificare nei giovani ogni sorta di cognizioni intuitive e sperimentali sui varî oggetti geometrici. Si può avere un'immagine del *punto* considerando ad esempio un granellino di polvere, il foro prodotto dalla punta di un ago in un foglio di carta, ecc.: la *sfera* si può concepir come superficie d'un corpo rotondo, quale ad es. una palla, un arancio, un globo artificiale. Se un'astà rigida è fissa da un'estremità — sia per es. A — ma può girare intorno ad A come pernio, le posizioni dell'altro estremo B porgono immagine dei varî punti che ' distan da A quanto B '. Così un filo teso tra due punti A e B, uno dei quali sia fisso, potrà servire a darci un'idea così della *sfera* B_A, come del segmento |AB|; ecc. E la più parte dei nostri *assiomi* si presterebbe assai bene a verifiche sperimentali; da istituir p. es. sopra sistemi *articolati* di semplicissima struttura; o col sussidio di *fili* opportunamente saldati dall'un dei capi alla trama d'un telaio rigido; ecc.

Ma la Geometria, come scienza formale, potrebbe anche reggersi ed essere intesa, pur senza mai fare appello al contenuto intuitivo o fisico de' suoi concetti primitivi (il ' punto ' e la ' sfera '): perchè una mente educata alle idee generali o sorretta da una discreta facoltà di astrazione, divien capace di percepire, oltre il *senso logico* astratto, anche il nesso delle varie proposizioni e le loro veci deduttive, la concatenazione delle parti e i loro rapporti col tutto, ecc., sol che intenda alle proprietà cardinali, che i varî assiomi o postulati della Geometria conferiscono a quelle nozioni primitive; e si richiami costantemente alle dfnz. dei varî oggetti onde si parla. Quel che importa sovra ogni cosa è la pratica del ragionare con esattezza; vale a dire la cognizione sicura dei rapporti logici di *principio a conseguenza*: insomma l'arte o la facoltà di rettamente argomentare e concludere: facoltà che la Geometria contribuisce, del resto, a sviluppare e promuovere.

Nota 3ª. Allorquando si annette alle idee primitive un contenuto fisico, gli '*assiomi*' o '*proposizioni primitive*' sono affermazioni gratuite, giudizî più o meno evidenti, che non si dimostrano, ma con l'aiuto dei quali si riesce a provar tutto il resto per via di ragionamenti inoppugnabili. Conviene accettarli senza discussione, contentandoci d'una certezza intuitiva o sperimentale; visto che non si può *dimostrare* ogni cosa. Dal punto di vista formale (o si chiamano allor '*postulati*') appariscono invece quali " *condizioni*, o *premesse*, da cui dipende la validità o *consistenza* di tutto il sistema " — cioè di tutte le conclusioni a cui si perviene. In ogni modo si aggirano sempre intorno ai concetti primitivi (sia pure indirettamente, voglio dire attraverso una serie di defnz.[i]); e la verità loro, quando sia conosciuta od ammessa, è garanzia sufficiente per la verità delle altre prpsz.[i] — cioè di tutte le ' prpsz.[i] derivate ' o ' teoremi '. Ma (come abbiam detto) si può anche fare astrazione dalla verità o falsità di queste premesse: ritenendole in guisa di *condizioni* (nè vere, nè false) che nel loro insieme costituiscono " una *dfnz.*ᵉ *implicita* delle nozioni primitive ": senza che venga meno perciò la stabilità e l'armonia di tutto quanto il sistema come edifizio logico. (Ved. Nota 2ª). La prima volta il Maestro così parli ai discepoli: « Concedetemi la verità di codeste prpsz.[i] primitive; ed io vi conduco man mano, per « via di successive deduzioni, a dover riconoscere la verità di tutte le altre prpsz.[i] geometriche. « Gli assiomi son come il *seme* di tutte le verità geometriche: ma i germi di queste non si « svolgon da quelli, se non sian fecondati dal raziocinio. A questo modo s'istituisce, p. es., la Geom.ª « e l'Aritmetica; in ciò consiste sommariamente il *processo deduttivo*, che informa tutta quanta « la *Matematica pura* ».

Il dire, che una certa prpsz. P " *è conseguenza* " *di* altre prpsz.[i] A , B ... — o che " dalle A , B , ... *si deduce* la P " — significa appunto che un essere dotato di ragione, il quale ammetta

per vere le A, B, ... non può disconoscere la verità di P: insomma, che non ci è consentito affermare le A, B, ... e negare ad un tempo la P. — Osservate che le A, B, ... potranno esser conseguenza di altre prpsz.[1] A′, B′, ...; e questa a lor volta di altre A″, B″, .. (per la qual cosa anche P sarà deducibile dalle A″, B″, ...) e così via: ma ben s'intende come non ci sia dato il prolungar senza fine quest'ordine di successive riduzioni (e di qui nasce l'impossibilità di provare ogni cosa). Potrà nondimeno accadere che, proseguendo in quella maniera, si giunga ad un piccol numero di prpsz.[1] α, β, ... assai maneggevoli e credibili (voglio dire evidenti a chiunque considera il senso fisico e concreto delle relazioni e figure onde si parla) e dalle quali si possa inferir non soltanto la prpsz.[e] P, ma sì ancora tutto l'insieme dei fatti, che importa stabilire in Geometria. Allora ci converrà di accettare queste α, β, ... in qualità di principi, che non giova discutere: e avremo ottenuto *un sistema di assiomi o postulati* capaci di regger, deduttivamente parlando, l'intero edifizio geometrico. Pur vi sarà in ogni modo una certa arbitrarietà o libertà nella scelta di quei principî: onde una stessa prpsz., che un geometra accolse come postulato, qualcun'altro potrà dimostrarla con la scorta di nuovi principî: ecc. Ma, se ciascun postulato deve apparir come fatto 'evidente per sè medesimo' a chiunque considera il senso concreto e positivo dei termini geometrici (onde il nome di assioma); non così nei riguardi della Geometria quale scienza astratta e formale: dove gli stessi principî ben si potranno e dovranno avere soltanto per condizioni o prescrizioni, che s'impongono agli enti non definiti (come sarebbero il 'punto' e la 'sfera') acciò di restringer man mano l'arbitrarietà che li circonda e determinarne in qualche modo il concetto. Onde ciascun postulato suggella un nuovo carattere impresso nelle nozioni primitive (di punto e sfera): e così dall'insieme dei pstl.[1] risulteranno poi definite implicitamente queste nozioni (Ved. Nota 1ª). Dal primo punto di vista, i principî I, II e III (§ 1) parranno senz'alcun dubbio affermazioni superflue (in quanto dichiaran verità troppo ovvie): non così dal secondo. E invero, chi non abbia riguardo al consueto valor della frase " C dista da A quanto B ", non ha motivo di ritenere senz'altro, che B disti da A quanto B; cioè che una relazione fra punti, non ancor definita, ma già designata a quel modo, necessariamente interceda fra i punti B, A, B: e molto meno ch'essa sia conversiva o transitiva rispetto a B e C (¹).

Le prps.[1] primitive consentono caso per caso il decidere, se due dati oggetti appartengono, o non appartengono, alle categorie 'punto' e 'sfera': e tanto basta perchè i '*concetti* generali' di punto e sfera si possan dire acquisiti e determinati. Ma un'analisi un po' più minuta ed intrinseca (sulla quale non è opportuno d'insistere) permetterebbe altresì di enunciare una vera e propria definizione nominale di quei concetti generali, assegnando di ciascuno le qualità caratteristiche. A una dfnz. siffatta — che riuscirebbe senza alcun dubbio assai macchinosa e prolissa — suppliscono in parte i pstl. geometrici: mercè dei quali il Lettore, anche senza appellarsi alle sue conoscenze intuitive, viene acquistando per gradi, e riesce a formarsi man mano l'esatta nozione di quel che posson significare ed esprimere il punto e la sfera. I concetti derivati (come di 'retta', 'piano', 'segmento', ecc.) risultan poi noti e determinati nella stessa misura dei primitivi, attraverso lo schema delle dfnz. nominali (Nota 1ª). Ecc., ecc.

Nota 4ª. Di due figure F, F′, il dire che l'una, p. es. F′, "*si rappresenta univocamente sull'altra*" o "*si trasforma univocamente nell'altra*" è per significare qualmente "a ciascun punto di F *è subordinato* un certo punto di F′ ed uno solo" in virtù di qualche relazione esistente fra l'una e l'altra figura. I termini '*rappresentazione*', '*trasformazione*' non si definiscono (²): ma si sa che ciascuno congiunge i nomi di due figure (trasfor-

(¹) Non tutte le relazioni son riflessive, conversive e transitive: p. es. la relazione di parentela " Tizio è figlio di Caio " non può aver luogo, se Tizio e Caio sono la stessa persona; nè può stare insieme con la conversa " Caio è figlio di Tizio "; nè per esser Tizio figlio di Caio, e Sempronio figlio di Tizio, accadrà che Sempronio sia figlio di Caio: ecc., ecc.

(²) I concetti (aritmetici e geometrici) di 'trasform.[e]' 'funzione', 'corrispondenza' e simili — che appena si distinguon fra loro, e rientrano in quello più generale di 'relazione' — spettano di pien diritto alla Logica: e tutto ciò che diremo in questa rubrica vale eziandio nell'ipts. che F, F′ denotino *classi* o aggregati di qualsivoglia natura, dove per 'punto' si legga 'individuo' e per 'coincidenza', 'eguaglianza', ecc. Ved. p. es. G. Peano, *Formulario mathematico*, ed. V, pag. 73 (Torino, 1905).

mazione ' di F in F' ', rappresentazione ' di F sopra F' ', ecc.) ed involge che l'una, F', sia immagine dell'altra; cioè la rispecchi secondo una legge qualsiasi, per modo che ciascun punto di F richiami e determini un certo punto di F' ed uno solo. Si sottintende — come nell'idea general di ' funzione ' — che da uno stesso punto di F, o da più punti eguali fra loro in F, la nostra mente sia sempre portata sopra un solo punto di F', o sopra punti eziandio coincidenti fra loro (*univocità*): ma la scambievolezza, o *reciprocità*, delle due figure non è presupposta. Le due figure F ed F' posson confondersi in una; cioè si dànno eziandio trasformazioni o rappresentazioni ' d'una figura in sè stessa ': per esempio sì l'una che l'altra potranno anch'esser tutt'uno con la ' classe dei punti ' o ' *spazio* ' (P 1 § 1); onde si avranno trasformazioni ' dei punti in punti ', o rappresentazioni ' dello spazio su sè medesimo '; ecc. Qualunque volta $\mathfrak{R}$ denoti una rappresentazione univoca di F in F', ed A un punto arbitrario di F, *l'immagine o trasformato* di A secondo $\mathfrak{R}$ (o ' per mezzo di $\mathfrak{R}$ ') s'indica con ' $\mathfrak{R}A$ '.

Non è detto che ' punti distinti ' della figura F si specchino in ' punti distinti '; nè che ciascun punto della figura F' sia sempre immagine di qualche punto di F: ma se la prima di queste condizioni sarà soddisfatta, la trasformazione è da chiamare *isomorfa*; e, se si avverano entrambe, sarà da chiamar *conversiva*, o *reciproca*. Dunque ' isomorfa ' ogni trasformazione o rappresentazione di F in F', per cui succede, che nessun punto della F' è subordinato a più punti diversi in F; ' reciproca ' ogni trasformazione isomorfa di F in F', se ciascun punto della F' determina un punto della F, di cui sia l'immagine. Pertanto se è data una trasformazione *reciproca* di F in F' — e sia per es. $\mathcal{S}$ — sarà in pari tempo assegnata una trasformazione, eziandio conversiva o reciproca, di F' in F, in virtù della quale a ciascun punto A' della figura F' è subordinato quel punto A di F, che $\mathcal{S}$ converte in A': punto determinato ed unico, in quanto $\mathcal{S}$ è isomorfa per definizione. Questa nuova trasformazione, associata alla $\mathcal{S}$ e da $\mathcal{S}$ individuata, prende di nome ' trasformazione *inversa* ' di $\mathcal{S}$, e s'indica con $\overset{-1}{\mathcal{S}}$. — Allorquando una figura F si specchia in un'altra F' per mezzo d'una trasformazione reciproca $\mathcal{S}$ — e p. cons. F' si rappresenta univocamente sopra F per mezzo della trasformazione inversa $\overset{-1}{\mathcal{S}}$ — si suol dire che tra le figure F, F' intercede " una corrispondenza *perfetta*, *univoca e reciproca*, univoca *in ambo i sensi* o *biunivoca*, ecc. "; o che le due figure son " *riferite fra loro*, punto per punto " (v. Staudt). — ' Trasformazione *identica* ' (d'una figura in sè stessa) è quella rappresentazione per cui ciascun punto coincide con la propria immagine: una trasformazione sì fatta è certamente reciproca, e suole indicarsi con **1**; se si estende a tutto lo spazio, prende anche nome d' ' *identità* ', senz'altro.

Due trasformazioni $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ d'una medesima figura F in un'altra (o in sè stessa) diconsi ' *eguali* fra loro ' — e si scrive $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ — se, qualunque sia il punto A di F, sempre $\mathcal{P}A = \mathcal{Q}A$: vale a dir se le immagini d'uno stesso punto di F (qual ch'esso sia) per mezzo dell'una o dell'altra sempre coincidon fra loro. Ad es. qualunque trasformazione reciproca è sempre la inversa della propria inversa; e qualunque trasformazione identica è uguale alla propria inversa. Ecc. — Qualsivoglia trasformazione $\mathfrak{R}$ (di F in F') si può altresì concepire come *operazione sui punti* (della figura F); in quanto per mezzo di $\mathfrak{R}$ *si passa* univocamente dagli F alle loro immagini: se non che le più volte non ha importanza di sorta il *processo*, con che si ottiene ad es. $\mathfrak{R}A$ da A, ma si dee guardar solamente al soggetto dell'operazione ed ai risultati. Pare anzi questa la via più accessibile ai giovani (per acquistar le nozioni di cui parliamo): i quali, come già esperti nelle operazioni aritmetiche, onde si passa univocamente dai numeri di certe classi ad altri numeri (l'elevazione a quadrato, la divisione per due, ecc.) poco sforzo avranno da metter nell'immaginare un'operazione (geometrica) eseguibile su ciascun punto d'una figura assegnata (od anche su qualsiasi punto) e che ogni volta dia un punto per risultato [1].

[1] Di sì fatto modo d'intendere (comunissima appo i matematici) si hanno frequenti e opportune sanzioni nel nostro linguaggio; come ad es. nei termini *semigiro*, *specchiamento*, *traslazione*, ecc.: i quali richiamano distintamente l'idea di ' operazione geometrica ', e non di meno si usano pur con vantaggio nel senso di relazione (cioè di *simmetria*, *equipollenza*, ecc.).

Se, essendo F, F', F'' tre date figure, $\mathcal{S}$ sia trasformazione di F in F', e $\mathcal{Q}$ di F' in F'', allora si chiama "*prodotto* di $\mathcal{S}$ per $\mathcal{Q}$", o "*risultante* delle $\mathcal{S}, \mathcal{Q}$" (nell'ordine in cui sono scritte) la trasformazione di F in F'', che a ciascun punto A di F dà per immagine il punto $\mathcal{Q}(\mathcal{S}A)$: insomma l'operazione composta, che nasce eseguendo successivamente le operazioni $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ (la seconda su quel che risulta dalla prima). La nuova trasformazione qui definita si indicherà con '$\mathcal{Q}\mathcal{S}$' [onde $\mathcal{Q}\mathcal{S}A \equiv \mathcal{Q}(\mathcal{S}A)$, qualunque sia A]; ma si leggerà procedendo da destra sinistra. E, se $F = F'$, il prodotto di $\mathcal{S}$ per sè stessa — o 'quadrato di $\mathcal{S}$' — s'indicherà con '$\mathcal{S}^2$'; ecc., ecc. Il prodotto di una trasformazione reciproca per la propria inversa è una trasformazione identica: $\overset{-1}{\mathcal{S}}\mathcal{S} = \mathcal{S}\overset{-1}{\mathcal{S}} = 1$. Allo stesso modo si definisce ordinatamente il prodotto di *tre*, *quattro*, o più rappresentazioni: in cui si riscontra immediatamente la proprietà *associativa*, ma non ha luogo, generalmente parlando, la proprietà *commutativa*. *Permutabili* l'una con l'altra due trasformazioni (di una data figura in sè stessa) allorquando il prodotto è commutativo, cioè non dipende dall'ordine dei due fattori. *Involutoria* qualunque trasformazione reciproca (d'una figura in sè stessa), che si confonda con lapropria inversa; ed è quanto dire che il suo quadrato equivalga all'identità. Ecc. Ecc. — Infine, rispetto a qualunque trasformazione $\mathfrak{R}$ d'una figura in un'altra (o in sè stessa), dicesi 'punto *unito*, o *tautologo*' qualunque punto, che per avventura sia convertito in sè stesso da $\mathfrak{R}$.